RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 21 gennaio 1906.

F. D'Ovidio, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle differenze finite.* Nota del Corrispondente G. Peano.

A note formule di calcolo differenziale e integrale corrispondono altre formule per le differenze finite, utili nelle applicazioni pratiche, e che qui esporrò rapidamente.

1. Sia a un numero intero, positivo o negativo, n un numero naturale, e b un intero maggiore di $a+n$. Indichiamo con f una funzione reale dei numeri interi compresi fra a e b. Allora il valore fb è espresso mediante fa, le sue successive differenze fino all'ordine n, e dalle differenze di ordine $n+1$ di f, pei valori da a a $b-n-1$ della variabile, dalla formula

$$fb = \Sigma[\mathrm{C}(b-a, r)\, \Delta^r fa \,|\, r, 0 \cdots n] + \\ + \Sigma[\mathrm{C}(b-x-1, n)\, \Delta^{n+1} fx \,|\, x, a \cdots (b-n-1)].$$

I simboli hanno il valore conforme al « Formulario Matematico » (vedasi tomo V, pp. 131, 134). Esiste qualche varietà nelle notazioni usate dagli Autori nel calcolo delle differenze finite.

Il primo sommatorio, a cui si ridurrebbe la formula per $b = a+n$, è l'espressione del valore della funzione mediante le successive differenze, quale fu data dal Mercator nel 1668. Il secondo termine ne esprime il resto.

Tutta la formula è analoga a quella di Taylor, col resto sotto forma di integrale definito.

2. Nelle stesse ipotesi, la differenza fra fb e la somma dei primi $n+1$ termini dello sviluppo di Mercator, cioè il resto di cui sopra si parla, è della forma $C(b-a, n+1)$ moltiplicato per un valore medio fra quelli assunti da $\Delta^{n+1} fx$, per x intero compreso fra a e $b-n-1$.

Risponde alla formula di Taylor, col resto di Lagrange.

3. Avendo a, b, f il significato precedente, e $b > a+1$, se x è un intero compreso fra a e b, allora la differenza fra fx, e

$$fa + (x-a)(fb-fa)/(b-a),$$

funzione di primo grado che per $x=a$ ed $x=b$ assume i valori fa e fb, vale

$$(x-a)(x-b)/2$$

moltiplicato per un valore medio fra quelli assunti da $\Delta^2 fx$, variando x da a a $b-2$ (per valori interi).

È analogo al teorema di calcolo differenziale che esprime l'errore nell'interpolazione di primo grado mediante la derivata seconda (Formulario, pag. 290).

4. Nelle ipotesi 3, la somma dei valori di fx, quando x varia per valori interi da a a b, è per approssimazione eguale al loro numero $b-a+1$, moltiplicato per la media aritmetica dei due valori estremi. L'errore in questa approssimazione si può esprimere colle differenze seconde, e si ha:

$$\Sigma(f, a \cdots b) = (b-a+1)(fa+fb)/2 - \\ - \Sigma[(x-a)(b-x)\,\Delta^2 f(x-1) \mid x, (a+1)\cdots(b-1)]$$

analoga alla formula di calcolo, che esprime un integrale definito colla formula dei trapezî, più un resto sotto forma di integrale.

5. Il resto nell'approssimazione precedente è riduttibile alla forma: $-C(b-a+1, 3) \times$ valore medio di $\Delta^2 fx$, quando x varia da a a $b-2$, diviso per 2.

Le formule precedenti si possono dimostrare come le corrispondenti di calcolo, con opportune variazioni. Mi sono occorse in calcoli su rendite vitalizie; e non mi fu dato di incontrarle nelle pubblicazioni ordinarie.

Astronomia. — *Intorno al calcolo della rifrazione astronomica, senza speciali ipotesi sul modo di variare della temperatura dell'aria coll'altezza.* Nota del Corrispondente P. Pizzetti.

Il modo di variare della densità atmosferica secondo l'altezza ha, come è noto, una influenza relativa assai piccola sul calcolo della rifrazione astronomica, fino a che la distanza zenitale del raggio luminoso non si approssima all'angolo retto. Così una ipotesi, qual'è quella di Bessel, la quale tanto vivamente contrasta coi dati dell'osservazione, da supporre un gradiente termico verticale minore di $0^g,12$ nella temperatura centesimale dell'aria (per 100 metri di elevazione a partire dal livello del mare), conduce tuttavia, nel calcolo della rifrazione, a risultati teorici dei quali l'applicazione pratica è stata, per comune esperienza degli astronomi, riconosciuta soddisfacente nella maggior parte dei casi.

Le speciali ipotesi intorno alla costituzione fisica dell'atmosfera e i laboriosi sviluppi di calcolo cui esse danno luogo, rappresentano quindi, per così dire, un lavoro perduto, ed è invece naturale ed opportuno, sia dal punto di vista didattico, sia rispetto alla discussione critica dei risultati dell'osservazione, il ricercare *con quale grado di approssimazione si possa calcolare la rifrazione astronomica quando si rinunci a particolari ipotesi intorno al modo di variare della temperatura dell'aria coll'altezza.*

La ricerca che qui ci proponiamo non è nuova. Del determinare la rifrazione supponendo soltanto che la temperatura *non cresca* coll'altezza, si occupò diffusamente Ossian Bonnet, nella sua *Thèorie de la réfraction Astronomique* (1), ma essendosi egli proposto a priori di risolvere il problema per mezzo di una serie procedente secondo le potenze di tang z (z = distanza zenitale iniziale) ha ottenuto un grado di approssimazione minore di quello che si può in realtà raggiungere.

Il sig. Andoyer nella sua Nota (2): *Sur la théorie de la réfraction* ha dato una formola estremamente semplice e indipendente da ipotesi sulla

(1) Nouvelles Annales de Mathematiques, VI, 1887. Anche il sig. Radau nella ben nota sua Memoria: *Recherches sur la théorie des refractions astronomiques* (Annales de l'Obs. de Paris, t^e XVI) dà lo sviluppo della rifrazione per le potenze di tang z, e pone in evidenza come taluni importanti elementi di questo sviluppo siano indipendenti dalla costituzione dell'atmosfera. Il sig. Bemporad nella sua recente Memoria: *Sulla teoria della refrazione astronomica* (Mem. Soc. Spettroscopisti, vol. XXXIV) dà una formola del tipo $A \operatorname{tang} z + B \operatorname{tang}^3 z$, la quale è indipendente dal modo di decremento della temperatura coll'altezza. Egli fa vedere come, fino a 75° di distanza zenitale, il calcolo numerico di questa formola fornisca per la rifrazione dei valori che presentano differenze trascurabili da quelli calcolati colla formola di Bessel.

(2) Bulletin Astronomique, octobre 1905.

costituzione dell'atmosfera, pel caso di distanze zenitali non superiori a 75°. Ma anche per questa formola si parte dallo sviluppo per le potenze di tang z; e non è poi assegnato un limite superiore dell'errore cui la formola stessa è soggetta (1).

Mi propongo di risolvere qui il problema sopraenunciato e precisamente di trattare le quistioni seguenti:

1° con quale precisione è possibile calcolare la rifrazione astronomica quando (ammessa, al solito, la distribuzione regolare per strati sferici di egual densità) si faccia, *riguardo alla temperatura dell'aria, la sola ipotesi che essa non cresca coll'altezza*;

2° qual'è l'errore massimo cui può dar luogo il non verificarsi di questa ipotesi, il fatto cioè di *una inversione della temperatura*;

3° di quanto cresce la precisione, *quando si supponga, in base alla osservazione, conosciuta la legge di variazione della temperatura, dal livello del mare fino ad una certa altezza.*

Restano, naturalmente, escluse dai calcoli che seguono le distanze zenitali molto vicine a 90°, ma d'altra parte è chiaro a priori, e ben confermato dall'esperienza, come l'andamento delle visuali prossime all'orizzonte sia tanto strettamente legato alle condizioni degli strati bassi dell'aria, da render vano ogni tentativo di esatta ricerca a priori.

2. Stabiliamo alcune formole preliminari. Chiamiamo p, ϱ, t, n la pressione, la densità, la temperatura assoluta e l'indice di rifrazione dell'aria alla distanza r dal centro della Terra, e segnamo coll'indice 0 queste lettere quando si riferiscano al luogo d'osservazione. E intendiamo, salvo avviso contrario, che gli integrali che figurano nelle formole seguenti siano sempre estesi dal luogo d'osservazione fino al limite superiore dell'atmosfera.

Avremo

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\varrho}{\varrho_0}\frac{t}{t_0} \tag{1}$$

e posto

$$\frac{r_0}{r} = 1 - s\,, \tag{2}$$

$$dp = -g\varrho \cdot dr = -g_0 r_0 \varrho \cdot ds \tag{3}$$

ove g e g_0 sono le accelerazioni della gravità alle distanze r ed r_0 risp. dal centro terrestre.

(1) La Memoria del sig. Andoyer contiene pure una pregevole trattazione relativa al caso di distanze zenitali superiori a 75°. La formula da lui adottata corrisponde ad un modo di variare della temperatura che concorda coi dati dell'osservazione *per quanto riguarda il valore iniziale del gradiente termico verticale.*

Posto

$$\beta = \frac{p_0}{g_0 r_0 \varrho_0}, \tag{4}$$

le (1) e (3) danno

$$\beta \frac{dp}{p_0} = -\frac{\varrho}{\varrho_0} ds. \tag{5}$$

D'altra parte

$$n = 1 + \alpha \frac{\varrho}{\varrho_0}, \quad n_0 = 1 + \alpha, \tag{6}$$

dove $\alpha = 0{,}0002927$ se ϱ_0 è la densità corrisp. a 760^{mm} di barometro e a 0° di temperatura centigrada. Quindi posto

$$\frac{n_0}{n} = y, \tag{7}$$

sarà, tenuto conto della (5):

$$(y - n_0)\, ds = -\alpha y \frac{\varrho}{\varrho_0} ds = \alpha\beta y \frac{dp}{p_0}, \tag{8}$$

L'integrazione per parti dà quindi:

$$\int s^q \cdot dy = \int s^q \cdot d(y - n_0) = -q \int (y - n_0)\, s^{q-1}\, ds \tag{9}$$

$$= -q\alpha\beta \int y s^{q-1} \frac{dp}{p_0}$$

poichè la s si annulla al limite inferiore, la $y - n_0$ al superiore. Con una nuova integrazione per parti (supposto $q > 1$)

$$-\int y s^{q-1} \frac{dp}{p_0} = \int \frac{p}{p_0} s^{q-1} \cdot dy + (q-1) \int \frac{p}{p_0} s^{q-2}\, y \cdot ds \tag{10}$$

giacchè p si annulla al limite superiore. Poichè t non cresce coll'altezza, la (1) dà

$$\frac{p}{p_0} \leq \frac{p}{p_0};$$

quindi la (5):

$$\frac{p}{p_0} ds \leq -\beta \frac{dp}{p_0}.$$

L'ultimo termine, nel secondo membro della (10), è dunque tutt'al più uguale a

$$-(q-1)\beta \int y s^{q-2} \frac{dp}{p_0},$$

ovvero, in grazia della (9) ove si cangi q in $q-1$, tutt'al più uguale a

$$\frac{1}{\alpha}\int s^{q-1}\cdot dy\,.$$

Quanto al primo termine nel secondo membro della (10), esso è evidentemente minore di

$$\int s^{q-1}\cdot dy\,.$$

Quindi dalle (9) (10) deduciamo:

$$\int s^q\cdot dy < \beta(q\alpha+q)\cdot\int s^{q-1}\cdot dy\,. \tag{11}$$

Abbiamo poi

$$\int s\cdot dy = -\int(y-n_0)\,ds = -\alpha\beta\int y\,\frac{dp}{p_0}\,;$$

e poichè la variabile y è compresa fra 1 ed $n_0 = 1+\alpha$ e siccome

$$\int\frac{dp}{p_0} = -1$$

sarà

$$\alpha\beta < \int s\cdot dy < \alpha(1+\alpha)\,\beta\,, \tag{12}$$

La (10) dà poi

$$\int s^2\cdot dy < 2\beta^2\alpha(1+\alpha)^2\,, \tag{13}$$

$$\int s^3\cdot dy < 6\beta^3\alpha(1+\alpha)^3\,,$$

ecc. ecc.

Si ha pure $(q>1)$

$$\int(n_0-y)^q\,ds = -\alpha\beta\int y(n_0-y)^{q-1}\,\frac{dp}{p_0}\,.$$

E poichè il massimo valore di y è n_0, il massimo di n_0-y è $n_0-1=\alpha$, sarà

$$\int(n_0-y)^q\cdot ds < \alpha\beta n_0(n_0-1)^{q-1} = \alpha^q\beta(1+\alpha)\,. \tag{14}$$

Queste formole son poco differenti da quelle delle quali ha fatto uso il sig. Andoyer nella citata Memoria.

3. Procediamo al calcolo approssimato della rifrazione, partendo dalla nota espressione

$$R = \int \frac{\frac{r_0}{r} \cdot d\frac{n_0}{n}}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 z - \left(\frac{z_0\, n_0}{z\, n}\right)^2}}$$

ove z è la distanza zenitale osservata. Colle nostre notazioni

$$R = \int \frac{(1-s)\, dy}{\sqrt{c^2 - y^2 (1-s)^2}} \tag{15}$$

ove si è posto $c = \frac{1}{\operatorname{sen} z}$. Supporremo in tutti i calcoli che seguono $c^2 > {n_0}^2$ che è il massimo valore del prodotto $y^2(1-s)^2$. Col valore di α dato più sopra, ciò equivale a supporre

$$z < 88°.36'.50''.$$

Posto

$$F = \frac{1-s}{\sqrt{c^2 - y^2 (1-s)^2}}$$

abbiamo, collo sviluppo di Taylor per potenze di s:

$$F = \frac{1}{\sqrt{c^2 - y^2}} - \frac{c^2 \cdot s}{(c^2 - y^2)^{3/2}} + E \tag{16}$$

dove

$$E = \frac{3}{2} \frac{c^2 y^2 s^2 (1-s')}{[c^2 - y^2 (1-s')^2]^{5/2}}; \qquad (0 < s' < s)$$

(si osservi che s nel caso nostro è sempre compreso fra 0 ed 1). Quindi

$$E < \frac{3}{2} \frac{c^2 y^2 s^2}{(c^2 - y^2)^{5/2}}.$$

Le (15) (16) danno pertanto

$$R = \int \frac{dy}{\sqrt{c^2 - y^2}} - c^2 \int \frac{s \cdot dy}{(c^2 - y^2)^{3/2}} + \varepsilon \tag{17}$$

dove

$$\varepsilon = \int E \cdot dy < \frac{3}{2} c^2 \int \frac{y^2 \cdot dy \cdot s^2}{(c^2 - y^2)^{5/2}} < \frac{3}{2} \frac{c^2 n_0^2}{(c^2 - n_0^2)^{5/2}} \int s^2 \cdot dy.$$

E ricordando la (13)

$$\varepsilon < \frac{3 c^2 (1+\alpha)^4 \beta^2 \alpha}{(c^2 - n_0^2)^{5/2}} = 3 \beta^2 \alpha (1+\alpha)^4 \frac{\operatorname{sen}^3 z}{(1 - n_0^2 \operatorname{sen}^2 z)^{5/2}}. \tag{18}$$

Il primo termine nel secondo membro della (17) è, essendo 1 ed n_0 i valori limiti della y,

$$\int \frac{dy}{\sqrt{c^2 - c^2}} = \text{arc} \cdot \text{sen}(n_0 \operatorname{sen} z) - z_0 .$$

È questa l'espressione che si otterrebbe, quando le superficie di egual densità fossero piani orizzontali. In tal caso, com' è notissimo, il modo di variare della densità non ha alcuna influenza sul calcolo della rifrazione, la quale resta determinata dalla semplice applicazione della legge di Cartesio, pel passaggio dal mezzo il cui *indice* è n_0 a quello di *indice* 1.

Veniamo al secondo termine nel secondo membro della (17). Esso può scriversi, colla integrazione per parti

$$(19) \qquad -c^2 \int \frac{s \cdot dy}{(c^2 - y^2)^{3/2}} = c^2 \int \frac{(y - n_0)\, ds}{(c^2 - y^2)^{3/2}} + 3c^2 \int \frac{y(y - n_0)\, s \cdot dy}{(c^2 - y^2)^{5/2}} .$$

L'ultimo termine che indicheremo con ζ è minore, in valore assoluto, di

$$\frac{-3c^2 n_0}{(c^2 - n_0^2)^{5/2}} \int (y - n_0)\, s \cdot dy$$

e, integrando per parti:

$$\zeta < \frac{3c^2 n_0}{2(c^2 - n_0^2)^{5/2}} \int (y - n_0)^2\, ds < \frac{3\alpha^2\beta(1 + \alpha)^2 c^2}{2(c^2 - n_0^2)^{5/2}}$$

[vedi formola (14)]. Quindi finalmente

$$(20) \qquad \zeta < \frac{3\alpha^2\beta(1 + \alpha)^2 \operatorname{sen}^3 z}{2(1 - n_0^2 \operatorname{sen}^2 z)^{5/2}} .$$

Il primo termine nel secondo membro della (19) può scriversi ricordando la (8)

$$(21) \qquad c^2 \int \frac{(y - n_0)\, ds}{(c^2 - y^2)^{3/2}} = c^2 \alpha\beta \int \frac{y}{(c^2 - y^2)^{3/2}} \frac{dp}{p_0} .$$

E poichè y è compreso fra 1 ed n_0, questa espressione sarà compresa fra

$$(22) \qquad \frac{-c^2 \alpha\beta}{(c^2 - 1)^{3/2}} \quad \text{e} \quad \frac{-c^2 \alpha\beta n_0}{(c^2 - n_0^2)^{3/2}} .$$

Assumendo pertanto, come valore approssimato della espressione (21), la media aritmetica delle (22), commetteremo un errore δ il quale sarà, in valore assoluto, minore di metà della differenza

$$c^2 \alpha\beta \left[\frac{n_0}{(c^2 - n_0^2)^{3/2}} - \frac{1}{(c^2 - 1)^{3/2}} \right] .$$

Ricordando che $n_0 = 1 + \alpha$, si trova, con un'ovvia applicazione dello sviluppo di Taylor, che questa differenza è, in ogni caso, minore di

$$\frac{c^2 \alpha^2 \beta (c^2 + 2n_0^2)}{(c^2 - n_0^2)^{5/2}} .$$

Quindi, in valore assoluto,

$$\delta < \frac{\alpha^2 \beta \operatorname{sen} z (1 + 2n_0^2 \operatorname{sen}^2 z)}{2(1 - n_0^2 \operatorname{sen}^2 z)^{5/2}} . \tag{23}$$

Sicchè finalmente, se calcoliamo la rifrazione colla formola

$$R = \operatorname{arc\,sen}(n_0 \operatorname{sen} z) - z_0 - \frac{\alpha\beta \operatorname{sen} z}{2} \left[\frac{1}{\cos^3 z} + \frac{n_0}{(1 - n_0^2 \operatorname{sen}^2 z)^{3/2}} \right] \tag{24}$$

l'errore commesso sarà uguale alla somma dei tre errori indicati con ε, ζ, e δ, dei quali i limiti superiori sono rispettivamente dati dalle formole (18) (20) e (23). Ma è da osservare che l'errore indicato con ε è, in ogni caso, positivo, mentre quello denotato con ζ è negativo, e che di più, nelle ordinarie condizioni atmosferiche, il limite superiore del valore assoluto di ζ è inferiore a quello di ε [1], sicchè $\varepsilon + \zeta$ sarà in ogni caso minore, in valore assoluto, del limite superiore di ε. Quindi, finalmente, il limite superiore dell'errore cui è soggetta la formola (24) è minore di

$$|\varepsilon_{max}| + \delta_{max}|$$

dove i due massimi sono espressi dai secondi membri delle (18) e (23) rispettivamente.

Per le applicazioni numeriche, giova ricordare che per $t_0 = 273$, $p_0 = 760^{mm}$ i valori di α e β sono

$$\alpha_0 = 0{,}0002927 \ , \ \beta_0 = 0{,}001254$$

e che variando t_0, p_0, r_0, si ha con molta approssimazione

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\varrho_0}{\varrho_0'} = \frac{p_0}{p_0'} \frac{t_0'}{t_0} \ ; \ \frac{\beta}{\beta'} = \frac{p_0}{p_0'} \frac{r_0}{r_0'} \frac{\varrho_0'}{\varrho_0} = \frac{r_0}{r_0'} \frac{t_0}{t_0'} \tag{25}$$

quindi

$$\alpha = 0{,}0002923 \frac{p_0}{760} \frac{277}{t_0} \ ; \ \beta = 0{,}001254 \frac{r_0}{6370} \cdot \frac{t_0}{253} ,$$

[1] Il rapporto fra il secondo membro della (18) e quello della (20) è

$$\frac{\beta}{\alpha}(1 + \alpha)(1 + 2\alpha).$$

Per $t_0 = 273°$, $p_0 = 760^{mm}$, questo rapporto è $= 4{,}28\ldots$ Variando t_0 e p_0 il rapporto diventa prossimamente

$$\left(\frac{t_0}{273}\right)^2 \left(\frac{760}{p^0}\right) 4{,}28\ldots$$

Per $t_0 = 253°$, $p_0 = 790^{mm}$ esso si riduce quindi a 3,54 circa.

dove r_0 è contato in kilometri. Coi valori dati di α_0 β_0, si ottiene

$z =$	45°	60°	75°
$\varepsilon_{max} =$	0″,0006	0″,006	0″,23
$\delta_{max} =$	0″,00015	0″,0009	0″,009.

4. Cerchiamo ora quali modificazioni subiscano i calcoli precedenti nella ipotesi di una *inversione* della temperatura, ossia quando si ammetta che dal luogo di osservazione fino ad una certa altezza la temperatura varii in guisa da raggiungere un massimo $t_m > t_0$.

In questo caso, posto

$$\tau = \frac{t_m}{t_0},$$

alla diseguaglianza $\frac{p}{p_0} \leq \frac{\varrho}{\varrho_0}$ si dovrà nel paragrafo 3 sostituire la

$$\frac{p}{p_0} \leq \frac{\varrho}{\varrho_0} \tau$$

con che la disuguaglianza (11) si muta nella

$$\int s^q \cdot dy < \beta(q\alpha + \tau q) \int s^{q-1} \cdot dy \tag{11'}$$

le (13) e (18) nelle

$$\int s^2 \cdot dy < 2\beta^2\alpha(1+\alpha)(\tau+\alpha)$$

$$\varepsilon < 3\beta^2\alpha(1+\alpha)^3(\tau+\alpha)\frac{\operatorname{sen}^3 z}{(1 - n_0^2 \operatorname{sen}^2 z)^{5/2}}. \tag{18'}$$

Attesa la piccolezza di α, si può dedurre dal paragone delle (18) (18′) che per effetto dell'inversione della temperatura, il limite superiore dell'errore ε cresce, circa, nel rapporto da 1 a τ ossia da t_0 a t_m. Supposto un massimo di 15° per la differenza $t_m - t_0$, e posto $t_0 = 273$ si ha $\frac{t_m}{t_0} = 1{,}055$ circa. L'effetto dell'inversione della temperatura (entro i limiti in cui questo fatto può praticamente verificarsi), può dunque ritenersi trascurabile per quanto riguarda il grado di precisione nel calcolo della rifrazione.

5. Vediamo finalmente di quanto possa crescere questo grado di precisione pel fatto della conoscenza empirica della costituzione dell'atmosfera a partire dal suolo fino ad una certa altezza.

Indichiamo con l_0, l_1, l_2 rispettivamente la superficie di livello del luogo di osservazione, quella che limita superiormente la regione esplorata dell'atmosfera, e la superficie limite esteriore. Possiamo allora esprimere la rifrazione totale colla somma

$$R = R_1 + R_2,$$

ove R_1 esprime l'integrale nel secondo membro della (15) esteso fra i limiti l_0 , l_1 , mentre R_2 è lo stesso integrale fra l_1 ed l_2 . Poichè la costituzione dell'atmosfera è nota fra l_0 ed l_1, si possono supporre calcolati i valori numerici dell'indice n per i valori di r entro questi limiti, epperò l'integrale R_1 può supporsi calcolato con una quadratura meccanica, con quanta approssimazione si vuole.

Quanto al rimanente integrale R_2 non c'è altro a fare che applicare al calcolo di esso la formola approssimativa (24) dove però i valori delle costanti iniziali r_0 , p_0 , t_0 , n_0 , siano quelli relativi alla superficie l_1 limite superiore della regione esplorata e la distanza zenitale z è quella della trajettoria luminosa nel punto in cui essa attraversa la superficie l_1. Trascurando tuttavia, il che qui è lecito di fare, la variazione di z e di $n_0 \operatorname{sen} z$ e tenendo conto delle (25) si vede facilmente che, dette, come sopra, p_0 , t_0 , r_0 le costanti relative al luogo di osservazione, p'_0 , t'_0 , r'_0 le cose analoghe per la superficie l_1 , la conoscenza dello stato dell'atmosfera nello strato l_0 l_1 ci dà modo di far diminuire i limiti di errore indicati con ε_{max} e δ_{max} nel rapporto

$$(26) \qquad \begin{cases} 1 : \dfrac{p'_0}{p_0}\dfrac{t'_0}{t_0}\left(\dfrac{r'_0}{r_0}\right)^2 & \text{per } \varepsilon_{max}\,, \\ 1 : \left(\dfrac{p'_0}{p_0}\right)^2 \dfrac{t_0}{t'_0}\dfrac{r'_0}{r_0} & \text{per } \delta_{max}. \end{cases}$$

Supposto che si conosca la costituzione dell'atmosfera fino all'altezza di 10 km., ed ammesso, in conformità,

$$p'_0 = 220^{mm} \qquad t'_0 = 225^\circ \qquad r'_0 = 6380 \text{ km}$$
$$p_0 = 760 \qquad t_0 = 280 \qquad r_0 = 6370$$

i due rapporti ora detti diventano rispettivamente

$$1 : 0{,}232 \qquad 1 : 0{,}104\,;$$

Si ridurrebbe dunque a *meno di un quarto* il limite superiore dell'errore teorico nel calcolo della rifrazione.

È poi chiaro che la sola conoscenza del *valore iniziale del gradiente termico verticale* dell'aria può accrescere di poco o nulla la precisione nel calcolo della rifrazione. Infatti poichè, per concorde risultato delle osservazioni recenti [1] la variazione di temperatura da 1 a 2 km. d'altezza è già notevolmente differente di quella da 0 a 1 km., è chiaro che la conoscenza di quel valore iniziale equivale all'assegnare lo stato dell'atmosfera per una altezza non superiore a 1 km.; nel qual caso i rapporti (26) vengono a differire ben poco dall'unità.

[1] Vedi p. es. De Marchi, *Meteorologia generale*, pag. 113 e segg. (Milano, 1905).

Fisica tecnologica. — *Circa alle influenze della temperatura, delle vibrazioni, della umidità, dèll'elettrolisi, e della untuosità, sull'adesione e sull'attrito nello sfregamento fra vari corpi, e sul lavoro di alcuni aratri; riassunto di appunti sperimentali.* Nota del Socio Antonio Pacinotti.

Con lo scopo di trovar modo di diminuire un poco il lavoro occorrente nella trazione di arnesi aratorii, ho fatto qualche misura di coefficienti di attrito e di adesione fra alcuni corpi, e specialmente fra il ferro ed alcune terre, cercando di riconoscere se tali coefficienti possano diminuirsi col fare intervenire circostanze convenienti. Ho anche alquanto cercato di misurare direttamente il volume del terreno lavorato da un aratro e da un coltro, ed il corrispondente lavoro meccanico occorso, tanto stando nelle ordinarie condizioni della lavorazione del terreno, quanto adoprando influenze favorevoli alla diminuzione della trazione. Sebbene molto tuttora rimanga da fare sia per estendere le prove, sia per aumentarne l'accuratezza, tuttavia cerco di raccogliere succintamente diversi risultati conseguiti, e di presentarli come una prima approssimazione.

Un resoconto sufficientemente particolareggiato della massima parte delle prove fino ad ora fatte, si va stampando pel volume XXII delle Memorie della Società toscana di Scienze naturali; di tal resoconto presento all'Accademia una copia manoscritta, perchè in esso possono riscontrarsi parecchi particolari che per brevità tralascio in questo riassunto dei risultati principali ottenuti.

Nei capitoli 1, 3, 15 di quel resoconto sono riferite misure dell'angolo limite per lo scorrimento prodotto dal peso di una piccola slitta sopra un piccolo piano inclinato, alla temperatura ambiente ed allà alta temperatura generata dalla fiammella di un bruciatore di gaz posto sotto al piano inclinato; dalle quali misure in diversi casi sono conseguiti i valori del coefficiente d'attrito fra il piano inclinato e la slitta.

Dicendo P il peso della slitta, α la inclinazione con l'orizzonte del piano su cui appoggia, s la superficie del vero appoggio, f il coefficiente di attrito, λ il coefficiente di adesione; allorchè α sia il minimo angolo mantenente la discesa sul piano inclinato; si ha $f\,\mathrm{P}\cos\alpha + \lambda s = \mathrm{P}\,\mathrm{sen}\,\alpha$ e posson bastare due prove, nelle quali si sappia che f e λ rimangono invariati e P ed s abbiano valori ben conosciuti non del tutto uguali nelle due prove, per conseguire due relazioni che assegnino separatamente il valore di f e quello di λ.

Se si adopra una medesima slitta differentemente carica nelle due prove, e che la slitta ed il piano inclinato siano sufficientemente rigidi in modo da poter considerare invariata la estensione s del vero appoggio della slitta

sul piano di scorrimento, qualora nelle due prove si consegua lo stesso valore α dell'angolo limite di scorrimento, si può ritenere essere $\lambda = 0$ ed $f = \text{tang}\,\alpha$. Allora l'angolo α si dice angolo limite di attrito.

Dalle misure dell'angolo limite di attrito sono risultati, in diversi casi, a temperature elevate coefficienti di attrito più grandi che a bassa temperatura; giacchè si è avuto:

Pel ferro limato scorrevole sulla superficie divenuta violetta dell'acciaio alla temperatura bassa dell'ambiente $f = \text{tang}\,13°30' = 0{,}2400$;
ed a circa 390°, $f = \text{tang}\,23°10' = 0{,}4279$.

Per l'ottone non lucente sulla superficie divenuta violetta dell'acciaio alla temperatura ambiente $f = \text{tang}\,19°30' = 0{,}3541$;
ed a circa 390°, $f = \text{tang}\,23° = 0{,}4245$.

Pel platino sopra il platino
alla temperatura ambiente di 11°, $f = \text{tang}\,18° = 0{,}3249$;
ed a circa 165°, $f = \text{tang}\,23°30' = 0{,}4348$.

Per una terra sciolta secca, sulla superficie leggermente ossidata dell'acciaio alla temperatura ambiente, $f = \text{tang}\,29° = 0{,}5543$;
e verso 390°, $f = \text{tang}\,31° = 0{,}6008$.

Per terra argilla asciutta sull'acciaio abbrunito da leggera ossidazione
alla temperatura ambiente $f = \text{tang}\,21° = 0{,}3838$;
ed a circa 390°, $f = \text{tang}\,30°30' = 0{,}5891$.

Avvertiamo che nel caso del ferro a temperatura molto elevata esposto all'aria, si ha aumento di ossidazione al quale è attribuibile l'aumento dell'attrito.

Ma per i corpi che rimangono inalterati si può considerare come regola generale che l'attrito diminuisca coll'aumentare della temperatura. con alluminio sopra alluminio a 131° ho ottenuto $f = \text{tang}\,25°15 = 0{,}4716$ e dopo il lento ritorno alla temperatura ambiente 11°, $f = \text{tang}\,28°45' = = 0{,}5486$.

Il cristallo sopra cristallo ha somministrato
alla temperatura 11°, $f = \text{tang}\,14° = 0{,}2493$;
ed a 125° circa, $f = \text{tang}\,8°20' = 0{,}1465$.

Il platino sul cristallo pure ha somministrato
alla temperatura 11°, $f = \text{tang}\,12° = 0{,}2125$;
ed a 125° circa, $f = \text{tang}\,8°20' = 0{,}1465$.

Il cristallo finamente spulito sopra cristallo finamente spulito ha dato alla temperatura 9° circa $f = \text{tang}\,19°30' = 0{,}3541$;
e con 125° circa, $f = \text{tang}\,14°30' = 0{,}2586$.

Mica sopra mica in lamine trasparenti non colorate
a 9° circa $f = \text{tang}\,19°35' = 0{,}3558$;
ed a 125° circa, $f = \text{tang}\,13° = 2308$.

Per non riconoscere la diminuzione dell'attrito con l'aumentare della temperatura se si volesse sottilizzare, potremmo nel caso dell'alluminio avvertire che il leggerissimo strato di ossidazione prodotto dall'innalzamento di temperatura darà luogo ad un poco di adesione, e non resterà rigido durante lo scorrimento; e nel caso del cristallo si potrebbe dubitare che la maggior resistenza allo scorrimento ottenuta a bassa temperatura, quando il fornello era spento, fosse da attribuirsi ad attrazione elettrica fra una carica per lo sfregamento presa dalla capsulina che faceva da slitta, ed una carica di nome contrario lasciata sul camino percorso sul cristallo; avvertendo che tali cariche non si produrranno quando, acceso il fornello, la lastretta di cristallo è lambita dai gaz caldi della combustione, e tenuta da essi in comunicazione col suolo. Ma queste sottigliezze non valgono a sufficienza. Ho avvicinato al piatto di un elettroscopio a foglie d'oro la lastretta di cristallo, e non solo la ho trovata scarica quando era calda e da poco stata lambita dai prodotti della fiamma; ma anche quando essendo alla temperatura ambiente la avevo appositamente, molto ripetutamente, sfregata con la capsulina di platino, o con quella di cristallo. E l'elettroscopio adoprato era assai sensibile, giacchè una bacchetta di cristallo sfregata fortemente con panno lano ed avvicinata ad esso, ne faceva divergere le fogliette enormemente.

Del resto, son tornato recentemente a guardare l'angolo limite d'attrito fra la piccola slitta di ferro ed il piccolo piano inclinato di acciaio a varie temperature, con l'avvertenza di non spingere l'inalzamento di temperatura oltre ai 100° onde non avvenga sensibile ossidazione; e fino a tal limite, ho visto che l'attrito diminuisce col crescere della temperatura, e quando le superficie di ferro e acciaio sono metalliche, e quando sono rivestite di ossidazione che le rende violette.

Soltanto il platino sembra fare eccezione alla regola; ma quando anche ciò si confermasse, non vi sarebbe incompatibilità nel crescere l'attrito col crescere della temperatura se lo sfregamento avviene fra platino e platino, ed invece decrescere se lo sfregamento avviene sul cristallo; soltanto questa diversa influenza delle vibrazioni calorifiche nella modificazione che l'aumento della loro ampiezza apporta sulla resistenza di attrito, può far pensare che si producano con lunghezze d'onda estremamente piccole vibrazioni concordanti nel cristallo, ed invece fra loro discordanti fra platino e platino.

Si può vedere qualche influenza alquanto analoga delle vibrazioni acustiche sull'attrito. Sopra una lastra sonora di ottone, avvitata sul centro ad una colonnetta di un lungo banchetto che porta similmente altre cinque lastre, ho posato un piccolo parallelepipedo di legno; e sottoponendo ad una estremità del banchetto un sostegno inalzabile, ho trovato occorrere prossimamente l'angolo 35°30′ fra la lastra e l'orizzonte per ottenere che continuasse la discesa del pezzetto di legno sulla lastra allorchè veniva un poco smosso in discesa. La superficie della lastra è leggermente ossidata; la sua forma

è quadrata con 20 centimetri di lato, e con grossezza poco minore a due millimetri. Il parallelepipedo di legno pesa 4 grammi; è lungo centimetri 3,1, largo 1,6, alto 1,2; esso non parte da sè in discesa sebbene la lastra sia inclinata a 35°30′, quando la lastra è in quiete: ma se con l'archetto di crini si sfrega leggermente uno spigolo della lastra in modo da farla un poco suonare, avviene la discesa rapida del pezzetto di legno.

Ho abbassato il sostegno in modo che l'inclinazione della lastra con l'orizzonte era ridotta a 20°, ed era di gran lunga insufficiente a mantenere la discesa del prismetto di legno anche dopo il di lui smovimento. Il prismetto di legno essendo posto presso il canto diagonalmente opposto alla punta della lastra che fra l'indice ed il pollice della mano sinistra stringevo onde facilitare la formazione delle linee nodali diagonali; quando ho attaccato con l'archetto il mezzo del lato in modo che corrispondentemente alle linee nodali diagonali, la lastra suonasse il sol_3, avveniva decisamente la discesa del prismetto. Ma se appoggiando sul lembo della lastra le dita indice e medio della sinistra sfregavo con l'archetto fra esse interposto, in modo che la lastra anche intensamente producesse un suono acuto corrispondente a piccoli compartimenti vibranti, il prismetto di legno trovava subito qualche luogo da cui non discendeva, dove copriva due compartimenti di inversa fase.

Analoghi risultati si ottengono con soli due gradi di inclinazione, e specialmente con lastre più grosse.

Per esprimere come le vibrazioni calorifiche discordanti possano aumentare l'attrito, ed invece le vibrazioni calorifiche concordanti lo possano diminuire; avverto che l'appoggio della slitta in ogni caso si fa sopra un gran numero di minimi compartimenti vibranti, e che se le vibrazioni si suppongono discordanti nell'insieme non risulta da esse una impulsione sulla slitta, ma soltanto per l'inalzamento di temperatura le superficie d'appoggio divengono più scabrose di scabrosità minime varianti che possono accrescerne gli addentellamenti particellari e l'attrito; mentre invece se le vibrazioni calorifiche si suppongono concordanti, in modo che due compartimenti contigui posti ai due lati di una medesima linea nodale siano in opposizione di fase, non solo contemporaneamente alcuni compartimenti presenteranno il massimo di avvallamento ed altrettanti il massimo di rilievo, ma anche contemporaneamente torneranno tutti insieme a ricostituire la superficie nella sua posizione di equilibrio; e da tal posizione di equilibrio durante il tempo di mezza vibrazione semplice la slitta verrà spinta in fuori normalmente alla superficie, a disimpegnare le sue rugosità, talmente che l'attrito ne resulterà diminuito.

Nello sfregamento del ferro dell'aratro con la terra alquanto umida non è trascurabile la adesione, e per apprezzarne il coefficiente separatamente dal coefficiente d'attrito, bisognerebbe anche osservare e misurare precisamente la estensione s della superficie veramente appoggiata ed aderente della slitta; cosa non sempre tanto facile, e che per ora nelle prove fatte col metodo

del piano inclinato non ho nemmeno approssimativamente realizzato. Tuttavia la misura dell'angolo limite di scorrimento α, e del peso P della slitta fa conoscere la resistenza complessiva risultante dalla adesione e dallo attrito $P \operatorname{sen} \alpha$, e non è inutile lo apprezzare come questa varia col variare della temperatura.

Per la terra sciolta un poco umida trovai come angolo limite sull'acciaio leggermente spontaneamente ossidato, alla temperatura ambiente l'angolo di 41 gradi, ed invece verso 390° ebbi 28°39′. E giacchè $\frac{\operatorname{sen} 28°30'}{\operatorname{sen} 41°} = 0{,}7273$, pel riscaldamento la resistenza complessiva era ridotta a circa tre quarti.

Per un parallelepipedo di argilla un poco umida, pesante $P = 0^k{,}026$ con circa il 12 per cento in peso di acqua facilmente evaporabile, la cui faccia rivolta contro l'acciaio misurava centimetri quadrati 9,88, ebbi alla temperatura ambiente come angolo limite 71°, e portata la lastretta d'acciaio verso 390° la discesa del parallelepipedo fumante avvenne colla inclinazione di soli 12 gradi; e giacchè $\frac{\operatorname{sen} 12°}{\operatorname{sen} 71°} = 0{,}22$ pel riscaldamento a circa 390° la resistenza complessiva atteso lo sprigionarsi del vapor d'acqua fra l'acciaio caldo ed il prismetto di argilla umida era ridotta a meno di un quarto.

Sulla lastretta calda avendo lasciato asciugare il parallelepipedo di argilla, l'angolo limite ad alta temperatura è salito a 30°30′; e considerando come nulla la adesione della argilla secca contro l'acciaio caldo, si può considerare come coefficiente d'attrito fra questi corpi ad alta temperatura $f = \operatorname{tang} 30°30' = 0{,}5891$. Siccome i punti veramente sfreganti della argilla sulla lastra calda saranno divenuti quasi subito asciutti, si può ammettere che anche mentre fumava e scorreva con $\alpha = 12°$ il prismetto avesse per coefficiente d'attrito $f = 0{,}5891$, e si può valutare la forza F che il vapore faceva contro tutta la faccia del prismetto sotto la quale si sviluppava con l'avvertire che tal forza diminuiva la pressione $P \cos \alpha$ che sarebbe stata data dal peso, e che la adesione si poteva supporre nulla, in modo che si avesse la relazione $(P \cos \alpha - F) f = P \operatorname{sen} \alpha$ dalla quale si ricava $F = \frac{f P \cos \alpha - P \operatorname{sen} \alpha}{f}$. Nella quale espressione ponendo i valori numerici del caso riferito, si ottiene $F = 0^k{,}01625$ sopra tutti i 9,88 centimetri quadrati della faccia appoggiata del prismetto; ossia in media sopra ciascun centimetro quadrato grammi 1,645. E tenendo 13,59 grammi come peso di un centimetro cubico di mercurio, l'eccesso della pressione del vapore che si produceva sotto il prismetto sulla pressione atmosferica, avrebbe eguagliato la pressione data da una colonna di mercurio alta $1{,}645 : 13{,}59 = 0{,}12$ centimetri; ossia 1,2 millimetri.

La resistenza allo sfregamento del marmo sul marmo, che si trovava cresciuta dopo di aver riscaldato il marmo oltre 200° e di averlo lasciato

tornare lentamente alla temperatura ambiente, e che durante il raffreddamento andava crescendo col diminuire della temperatura, potrebbe supporsi influenzata da incipiente decomposizione chimica sulle superficie sfreganti e calde. Lo sviluppo di acido carbonico non avrebbe dovuto produrre sotto la slitta di marmo quasi a 100° nella prova considerata che l'aumento di pressione misurato da 2,2 millimetri di colonna di mercurio.

Come è riferito nel capitolo 4 della relazione, per procedere più speditamente nel riconoscimento delle resistenze allo scorrimento, presi a misurarle mediante la indicazione di un piccolo dinamometro con il quale tiravo orizzontalmente il prismetto di argilla posato sopra una lastra orizzontale di ferro o d'acciaio.

Dicendo R la trazione in chilogrammi indicata dal dinamometro, P il peso in chilogrammi della slitta compresa la carica sopra di essa aggiunta, S la superfice in metri quadrati della faccia d'appoggio, ed ε la frazione di tal superficie che veramente appoggia nello scorrimento ed aderisce; dicendo λ il coefficiente di adesione, ed f il coefficiente d'attrito si ha

$$Pf + S\varepsilon\lambda = R.$$

Cosicchè con due o più prove nelle quali f e λ restino invariati, e le altre quantità siano ben conosciute e diano coefficienti di f e λ non in tutte le prove i medesimi, si posson valutare i valori di f e di λ.

Per qualche prova nella quale non era stato osservato il valore di ε, ho tentato di considerare $\varepsilon\lambda$ come coefficiente di adesione apparente su tutta la superficie S; ma qui non riporto i coefficienti apparenti di adesione e di attrito per pressioni crescenti considerati nei capitoli 4 e 5 per l'argilla specialmente se alquanto plastica per l'umidità, perchè sono teoricamente inesatti, sebbene possano praticamente servire a rappresentare e talora a valutare approssimativamente la resistenza complessiva incontrata dalla argilla nello sfregamento.

Nel § 13 onde evitare, per quanto è possibile, che per la plasticità della argilla la estensione della superficie in contatto crescesse nelle prove successive, e poterne apprezzare approssimativamente il valore dalla ispezione della parte divenuta lustrata sulla faccia d'appoggio, ho incominciato con la maggiore delle cariche nella prima prova; e siccome il velo argilloso lasciato nello sfregamento sulla superficie dell'acciaio accresce fino ad un certo limite la adesione, ho ripetuto i passaggi del prismetto d'argilla un poco plastica sullo acciaio fino a conseguire che la trazione più non cambiasse sensibilmente; e tenendo conto soltanto delle trazioni occorrenti per lo scorrimento della argilla sul velo argilloso già formato, ho cercato di avvicinarmi al riconoscimento dei coefficienti assoluti di attrito e di adesione

nelle condizioni che si produrranno ordinariamente nella coltratura di terreno molto argilloso dotato di circa il 17 per cento di acqua spontaneamente evaporabile, ottenendo

$f = 0{,}4992$ con $\lambda = 1344{,}7$ chilogrammi per metro quadrato.

Nel § 12 il prismetto trascinato sulla lastra d'acciaio netta lucente essendo di argilla secca, sfrega su pochi piccoli appoggi che dopo molti passaggi si son coperti di ossido di ferro dando luogo ad $f_0 = 0{,}567$ con $\lambda_0 = 1377$ quando il prismetto non vibra; perchè vibrando andrebbe con trazioni assai minori.

Nel § 9. Dalla faccia d'appoggio del prismetto d'argilla un poco umida di circa 7 centimetri quadrati di superficie passava alla lastra d'acciaio una corrente elettrica di circa un decimo di ampère, e per l'acqua alcalina che essa portava sulla lastra d'acciaio era molto diminuita la resistenza allo scorrimento, e si aveva $f' = 0{,}1666$ con $\lambda' = 17{,}5$.

Nel § 11. Per l'aggiunta di acqua sulla superficie dello acciaio pulita, l'argilla vi ha mostrato i coefficienti $f_1 = 0{,}3333$ con $\lambda_1 = 32{,}9$. E se l'acqua aggiunta sulla lastra d'acciaio pulita conteneva il 10 per cento di potassa si aveva $f'' = 0{,}0666$ con $\lambda'' = 119{,}2$.

Nel § 14. Sull'acciaio pulito reso leggerissimamente untuoso con minima quantità d'olio d'oliva riasciugato con tela pulita, la argilla un poco umida scorre assai facilmente, e somministra $f_u = 0{,}2294$ con $\lambda_u = 205{,}7$.

§§ 2, 10. Ad un piccolo aratro in ferro conosciuto con la denominazione Sack da vigne corpo C, ho costruito nell'interno un fornello, nel quale può avvenire combustione di carbone che riscalda tutto il corpo di aratro. Tale aratro con la interposizione di un dinamometro venendo tirato da due uomini mediante un argano ad assolcare terra sciolta ed umida, richiese, allorchè il suo fornello era acceso, soltanto quattro quinti del lavoro che a parità di solco occorsegli quando il suo fornello era spento.

§ 10. La corrente elettrica stradale passava con piccola intensità andando dalla terra sciolta al piccolo aratro, sebbene la terra fosse umida; tuttavia si conseguiva a parità di volume scavato nel solco, il risparmio di quasi un decimo del lavoro occorso senza l'azione elettrolitica.

§ 16. La terra sciolta che veniva solcata essendo troppo poco umida, pochissima untuosità stesa sulle guance dell'aratrino non produsse che il cinque per cento di risparmio sul lavoro da esso richiesto; ed anche dopo l'aggiunta del riscaldamento, il risparmio del lavoro non superò il dodici per cento.

§§ 6, 7, 8. Un coltro Mélotte n. 2 nel quale è stato costruito un fornello interno per poterne scaldare l'orecchione ed alquanto il vomere, a parità di volume lavorato in terreno argilloso umido un poco più del consueto,

richiese dai bovi allorchè il suo fornello era acceso soltanto tre quarti del lavoro che occorsegli quando il suo fornello era spento; ma il vantaggio prodotto dal riscaldamento del coltro diminuì assai col diminuire della umidità del terreno.

§ 16. In terreno argilloso, contenente il 17 per cento in peso di acqua spontaneamente evaporabile, un pocolino di untuosità distesa su tutta la superficie sfregante del coltro ha prodotto il risparmio di oltre un quarto del lavoro senza di essa occorso, a parità di volume di terreno coltrato. La piccola spesa per la poca untuosità produrrebbe anche diminuzione nel logoramento del coltro.

Cristallografia. — *La trasformazione delle coordinate dei cristalli.* Nota del Corrispondente C. Viola.

Il problema della trasformazione delle coordinate non trova spesso applicazione in cristallografia, perchè l'orientamento dei cristalli durante la misura e lo studio di centinaia di individui offre già da sè il sistema di coordinate più indicato. La trasformazione delle coordinate è nondimeno talvolta necessaria; ed è indispensabile quando si voglia aggruppare i cristalli delle varie simmetrie in una unica figura fondamentale (Grundgestalt). È noto che il problema della trasformazione delle coordinate è ormai esaurito in seguito a vari lavori originali, come quelli di A. T. Kupffer 1826, W. H. Miller 1839, C. Fr. Naumann 1856, Q. Sella 1857, Th. Liebisch 1881, R. Panebianco, G. La Valle ecc., e che perciò poco o nulla rimane a dirne di nuovo. Ma il presente problema è suscettibile di ricevere più luce e semplicità; ciò si vuol dimostrare in questa Nota.

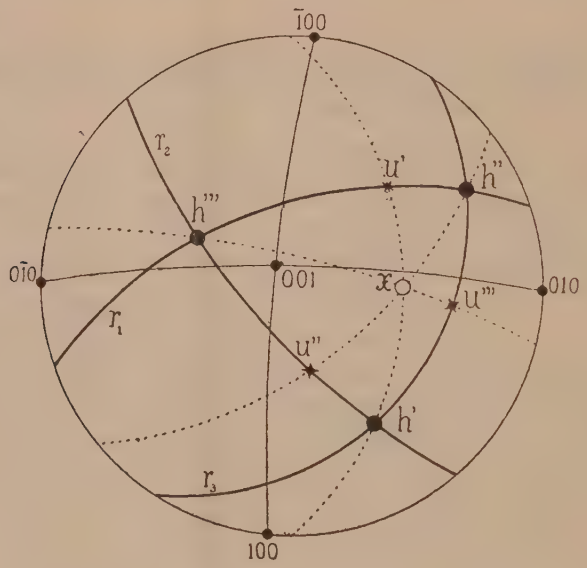
Sono date tre faccie del cristallo, figura annessa, che vogliamo denominare con h', h'', h''', i cui simboli nel vecchio sistema delle coordinate siano rispettivamente $(h_1' h_2' h_3')$, $(h_1'' h_2'' h_3'')$, $(h_1''' h_2''' h_3''')$. Con queste tre faccie sono date anche le tre zone r_1, r_2, r_3, le quali esse determinano; e cioè r_1 la zona della coppia di faccie $h'' h'''$, r_2 della coppia $h''' h'$ ed r_3 della coppia $h' h''$. Siano $[r_1' r_1'' r_1''']$, $[r_2' r_2'' r_2''']$, $[r_3' r_3'' r_3''']$ i rispettivi simboli delle dette tre zone in rispetto al vecchio sistema delle coordinate, e determinati con le regole note.

Il problema di cui qui si tratta è questo: il vecchio sistema delle coordinate rispetto al quale si trova riferito il cristallo, ha da essere trasformato in un nuovo, le cui faccie fondamentali sono h', h'', h'''. Allora i nuovi assi del cristallo saranno quelli delle tre zone r_1, r_2, r_3, e le faccie del cristallo acquistano nuovi simboli. E, per esempio, quale simbolo riceverà nel nuovo sistema la faccia x, il cui simbolo nel vecchio sistema è dato ed è $(x_1 x_2 x_3)$?

Si osservi che chiamando con y_1, y_2, y_3 tre numeri, si può sempre esprimere i tre indici di una faccia qualsiasi x nel modo seguente, salvo un fattore di proporzionalità:

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1 = y_1 h_1' + y_2 h_1'' + y_3 h_1''', \\ x_2 = y_1 h_2' + y_2 h_2'' + y_3 h_2''', \\ x_3 = y_1 h_3' + y_2 h_3'' + y_3 h_3'''; \end{cases}$$

dove i tre numeri y_1, y_2, y_3 sono indipendenti dal sistema delle coordinate, che si assume. Questo si dimostra elementarmente con un tratto di penna.



Si moltiplichi le equazioni (1) successivamente per r_1', r_1'', r_1''' e si sommino; si avrà dopo questa operazione:

$$x_1 r_1' + x_2 r_1'' + x_3 r_1''' = y_1(h_1' r_1' + h_2' r_1'' + h_3' r_1'''),$$

osservando che

$$h_1'' r_1' + h_2'' r_1'' + h_3'' r_1''' = 0$$

e

$$h_1''' r_1' + h_2''' r_1'' + h_3''' r_1''' = 0,$$

poichè le due faccie h'' e h''' sono nella zona r_1.

Si farà in seguito analoga operazione con i tre indici r_2', r_2'', r_2''' e poscia con gli indici r_3', r_3'', r_3''', e si otterranno ancora le due espressioni:

$$x_1 r_2' + x_2 r_2'' + x_3 r_2''' = y_2(h_1'' r_2' + h_2'' r_2'' + h_3'' r_2'''),$$
$$x_1 r_3' + x_2 r_3'' + x_3 r_3''' = y_3(h_1''' r_3' + h_2''' r_3'' + h_3''' r_3''').$$

Ma i tre trinomi

$$(2)\qquad \begin{cases} h'_1\ r'_1 + h'_2\ r''_1 + h'_3\ r'''_1 = \Delta_1, \\ h''_1\ r'_2 + h''_2\ r''_2 + h''_3\ r'''_2 = \Delta_2, \\ h'''_1\ r'_3 + h'''_2\ r''_3 + h'''_3\ r'''_3 = \Delta_3, \end{cases}$$

sono fra di loro eguali, epperò le tre espressioni precedenti si semplificano così:

$$(3)\qquad \begin{cases} y_1 = x_1 r'_1 + x_2 r''_1 + x_3 r'''_1, \\ y_2 = x_1 r'_2 + x_2 r''_2 + x_3 r'''_2, \\ y_3 = x_1 r'_3 + x_2 r''_3 + x_3 r'''_3; \end{cases}$$

dalle quali si vede che dato x_1, x_2, x_3 e le tre faccie h', h'', h''', sono anche determinabili i tre numeri y_1, y_2, y_3, i quali introdotti nelle (1) dànno gli indici x_1, x_2, x_3. Ora ci rimane a dare la prova che questi tre numeri sono indipendenti dal sistema di coordinate che si assume. A tale uopo si scrivano le equazioni (1) nella forma:

$$(1)_a\qquad \begin{cases} x_1 - y_1 h'_1 = y_2 h''_1 + y_3 h'''_1 = u'_1, \\ x_2 - y_1 h'_2 = y_2 h''_2 + y_3 h'''_2 = u'_2, \\ x_3 - y_1 h'_3 = y_2 h''_3 + y_3 h'''_3 = u'_3. \end{cases}$$

È evidente che (u'_1, u'_2, u'_3) è il simbolo di una faccia u', vedi (figura annessa), la quale è comune alla zona $h'' h'''$ e alla zona $x h'$. Ed è noto che se una faccia trovasi in una zona, i due numeri che la determinano, qui y_2 e y_3, ovvero 1 e $-y_1$, sono indipendenti dal sistema delle coordinate che si assume. Dunque risulta che la faccia u' trovantesi nella zona r_1 data dalla coppia $h'' h'''$, determina con la faccia h' una zona, per la quale passa anche la faccia x; e i numeri y_2 e y_3 che fissano la posizione di questa faccia u', sono indipendenti dal sistema delle coordinate che si assume.

Nella medesima maniera si troverà una faccia u'' la quale è contenuta nella zona r_2 data dalla coppia $h''' h'$, e determina nella faccia h'' una zona, per la quale passa la faccia x; e qui pure i due numeri y_3, y_1 che fissano la posizione di questa faccia u'', sono indipendenti dal sistema delle coordinate che si assume, ecc. Epperò è definitivamente dimostrato che i tre numeri y_1, y_2, y_3 dell'equazioni (1) sono indipendenti dal sistema delle coordinate, che si assume.

Dimostrato ciò, sarà lecito cambiare il sistema delle coordinate, senza cambiare i numeri y_1, y_2, y_3 nelle equazioni (1). Per avvicinarci al nostro problema, si eseguisca il cambiamento delle coordinate in guisa che i simboli delle faccie h', h'', h''' divengano rispettivamente (100), (010), (001), ossia che le dette tre faccie siano i nuovi piani fondamentali del sistema.

Con ciò cambierà anche il simbolo di una qualsiasi faccia x. Faremo dunque nelle (1)

$$h_1' = 1 \quad , \quad h_2' = 0 \quad , \quad h_3' = 0,$$
$$h_1'' = 0 \quad , \quad h_2'' = 1 \quad , \quad h_3'' = 0,$$
$$h_1''' = 0 \quad , \quad h_2''' = 0 \quad , \quad h_3''' = 1,$$

e chiamando con x_1', x_2', x_3', i nuovi indici della faccia x avremo dalle (1):

$$(1)_b \qquad x_1' = y_1 \quad , \quad x_2' = y_2 \quad , \quad x_3' = y_3.$$

Dunque i tre numeri y_1, y_2, y_3 denotano gli indici della faccia x, quando essa si immagini riferita al sistema delle coordinate che ha per piani fondamentali h', h'', h''', e per assi r_1, r_2, r_3.

Il nostro problema è pertanto risoluto. Infatti dalle $(1)_b$ e dalle (3) abbiamo:

$$(3)_a \qquad \begin{cases} x_1' = x_1 r_1' + x_2 r_1'' + x_3 r_1''', \\ x_2' = x_1 r_2' + x_2 r_2'' + x_3 r_2''', \\ x_3' = x_1 r_3' + x_2 r_3'' + x_3 r_3'''. \end{cases}$$

Le espressioni (1) e le espressioni (3) hanno una grande analogia fra di loro; anzi le une non sono che le reciproche delle altre. Ciò risulterà più chiaro dalle considerazioni che ora faremo.

Allorchè le trasformazioni delle coordinate sono state eseguite col sistema dei trinomi $(3)_a$ sarà possibile determinare gli indici che i vecchi piani fondamentali ricevono per rispetto al nuovo sistema delle coordinate. Trattandosi per esempio del vecchio piano fondamentale (100), per avere il suo nuovo simbolo si farà nelle $(3)_a$ $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0$; con ciò i nuovi indici della faccia (100) saranno:

$$x_1' = r_1' \quad , \quad x_2' = r_2' \quad , \quad x_3' = r_3'.$$

E analogamente il simbolo del vecchio piano fondamentale (010) per rispetto al nuovo sistema delle coordinate sarà $(r_1'' r_2'' r_3'')$; ed $(r_1''' r_2''' r_3''')$ sarà il nuovo simbolo del piano (001).

Mentre dunque $(h_1' h_2' h_3')$, $(h_1'' h_2'' h_3'')$, $(h_1''' h_2''' h_3''')$ rappresentano i simboli dei nuovi piani fondamentali per rispetto al vecchio sistema delle coordinate, rappresenteranno $(r_1' r_2' r_3')$, $(r_1'' r_2'' r_3'')$, $(r_1''' r_2''' r_3''')$ i simboli dei vecchi piani fondamentali per rispetto al nuovo sistema delle coordinate.

E del pari come $[r_1' r_1'' r_1''']$, $[r_2' r_2'' r_2''']$, $[r_3' r_3'' r_3''']$ sono i simboli dei nuovi assi per rispetto al vecchio sistema delle coordinate, così $[h_1' h_1'' h_1''']$, $[h_2' h_2'' h_2''']$, $[h_3' h_3'' h_3''']$ saranno i simboli dei vecchi assi per rispetto al nuovo sistema delle coordinate.

Gli sviluppi fin qui fatti possono essere brevemente e sinteticamente riassunti nel modo che segue.

In tutti questi sviluppi apparisce sempre un trinomio della forma

$$x_1 r' + x_2 r'' + x_3 r''',$$

il quale è maneggevole e noto ai cristallografi pratici.

Esso indica, ove si annulla, che la faccia dal simbolo $(x_1\, x_2\, x_3)$ giace nella zona dal simbolo $[r'\, r''\, r''']$.

E ove questo trinomio non si annulla, il suo valore, nel problema della trasformazione, dà l'indice nuovo della faccia dal vecchio simbolo $(x_1\, x_2\, x_3)$ per rispetto ad un nuovo asse il cui simbolo è $[r'\, r''\, r''']$.

Operando la trasformazione dei simboli delle faccie di un cristallo mercè i trinomi $(3)_a$ si introduce insieme un nuovo piano unitario. La nuova faccia unitaria avrà per simbolo (111) per rispetto al nuovo sistema delle coordinate. Per sapere quale è il simbolo di questo nuovo piano unitario per rispetto al vecchio sistema delle coordinate, avremo da fare nelle equazioni (1) $y_1 = y_2 = y_3 = 1$; chiamando gli indici di questa faccia con z_1, z_2, z_3 le (1) ci dànno

$$(4) \qquad \begin{cases} z_1 = h_1' + h_1'' + h_1''', \\ z_2 = h_2' + h_2'' + h_2''', \\ z_3 = h_3' + h_3'' + h_3'''. \end{cases}$$

D'altra parte il vecchio piano unitario nel vecchio sistema delle coordinate, cioè (111), cambierà di simbolo nel nuovo sistema delle coordinate. Vogliamo chiamare con $(a_1'\, a_2'\, a_3')$ questo nuovo simbolo. I suoi indici ci saranno dati dalle equazioni $(3)_a$, facendo quivi $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. Avremo dunque:

$$(5) \qquad \begin{cases} a_1' = r_1' + r_1'' + r_1''', \\ a_2' = r_2' + r_2'' + r_2''', \\ a_3' = r_3' + r_3'' + r_3'''. \end{cases}$$

Tutte le indeterminatezze che possono sorgere per effetto di un fattore di proporzionalità dai trinomi (1) e rispettivamente $(3)_a$, cadono di fronte alla determinazione della faccia unitaria, facendo uso degli stessi trinomi. Sia ad esempio dato nel problema della trasformazione che il vecchio piano unitario rimanga piano unitario anche nel nuovo sistema delle coordinate, non potremo allora prendere per indici nuovi i numeri x_1', x_2', x_3' o rispettivamente i loro rapporti $x_1' : x_2' : x_3'$ ma bensì i rapporti seguenti:

$$(6) \qquad \frac{x_1'}{a_1'} : \frac{x_2'}{a_2'} : \frac{x_3'}{a_3'}.$$

Se poi si volesse generalizzare il problema della trasformazione delle coordinate, e stabilire cioè che non la vecchia faccia unitaria, ma una qualsiasi data faccia, diventi faccia unitaria nel nuovo sistema, avremo da procedere presso a poco come dianzi. Sia $(e_1\ e_2\ e_3)$ il simbolo per rispetto al vecchio sistema delle coordinate di quella qualsivoglia faccia, che deve divenire faccia unitaria nel nuovo sistema delle coordinate; in tale caso i nuovi indici della faccia data x non staranno nei rapporti $x_1' : x_2' : x_3'$ ma bensì nei rapporti seguenti:

$$(7) \qquad \frac{x_1'}{e_1'} : \frac{x_2'}{e_2'} : \frac{x_3'}{e_3'};$$

essendo determinati gli indici e_1', e_2', e_3' mercè le equazioni $(3)_a$ poichè $(e_1'\ e_2'\ e_3')$ deve essere il simbolo della faccia $(e_1\ e_2\ e_3)$ per rispetto al nuovo sistema delle coordinate. E questi nuovi indici sono:

$$(8) \qquad \begin{cases} e_1' = e_1 r_1' + e_2 r_1'' + e_3 r_1''', \\ e_2' = e_1 r_2' + e_2 r_2'' + e_3 r_2''', \\ e_3' = e_1 r_3' + e_2 r_3'' + e_3 r_3'''. \end{cases}$$

Esempi. — Come primo esempio vogliamo eseguire una trasformazione semplice, vale a dire cambiare un solo degli assi delle coordinate. Il nuovo asse che deve sostituire [100] sia dato dal simbolo [211]. Per questa trasformazione e per cercare il nuovo simbolo di una qualsivoglia faccia x il cui simbolo dato è $(x_1\ x_2\ x_3)$, avremo da calcolare il valore del trinomio

$$x_1 r_1' + x_2 r_1'' + x_3 r_1''',$$

essendo $[r_1'\ r_1''\ r_1'''] = [211]$.

Il valore del dato trinomio è

$$2x_1 + x_2 + x_3;$$

epperò i nuovi indici della faccia x saranno

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 + x_2 + x_3, \\ x_2' &= x_2, \\ x_3' &= x_3. \end{aligned}$$

Questa trasformazione è subordinata a una determinata faccia unitaria, il cui simbolo nel vecchio sistema delle coordinate si ottiene, facendo nelle ultime equazioni $x_1' = x_2' = x_3' = 1$. Il simbolo di questa nuova faccia unitaria è dunque $(z_1\ z_2\ z_3) = (\bar{1}22)$.

La vecchia faccia unitaria cambia di simbolo nel nuovo sistema delle

coordinate. I suoi indici si ottengono facendo nelle ultime equazioni $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. Questi indici sono dunque:

$$a'_1 = 2 + 1 + 1 = 4,$$
$$a'_2 = 1,$$
$$a'_3 = 1.$$

Volendo che nella trasformazione delle coordinate rimanga come faccia unitaria la vecchia faccia unitaria (111), si dovranno prendere come nuovi indici della faccia qualsiasi x i rapporti seguenti:

$$\frac{2x_1 + x_2 + x_3}{4} : \frac{x_2}{1} : \frac{x_3}{1},$$

ossia

$$2x_1 + x_2 + x_3 : 4x_2 : 4x_3.$$

Il simbolo della faccia x che deriva da questi rapporti si trova dunque riferito al sistema degli assi [211], [010], [001], laddove il simbolo della stessa faccia x cioè $(x_1 x_2 x_3)$ è in rapporto col sistema degli assi (100), (010), (001) essendo in ambidue i sistemi la stessa faccia unitaria.

Come secondo esempio considereremo la trasformazione delle coordinate nei *feldispati*.

Questa importante specie minerale fu oggetto di molte ricerche sperimentali e teoriche. La sua comune orientazione è questa che la zona M1T rimane verticale, e la sfaldatura perfetta P guarda sopra verso l'osservatore. Secondo questa orientazione e avendo di mira la simmetria monoclina e triclina, risulta che faccie analoghe e analogamente sviluppate ricevono denominazione diversa, sicchè la figura fondamentale ne rimane incerta. Vari cristallografi si sono occupati di togliere questo inconveniente. Già Chr. S. Weiss considerò l'ortoclasio come pseudodimetrico. Mallart, Wallerant e altri ritennero, come ancora ritengono, i feldispati come pseudomonometrici. Anche Fedorow è di questo avviso osservando che la zona MP è pseudodimetrico-isotropa e la zona MTI è pseudoesagono-isotropa (1). In una Memoria posteriore Fedorow osserva che i feldispati sono dimetricaloidi ed esagonaloidi (2); e in una Nota recente assegna ai feldispati la struttura ottaedrica (3).

Nella mia cristallografia (4) io feci vedere che lo sviluppo delle faccie predominanti avviene attorno agli elementi di una figura fondamentale tertetraedica (drei- und vierzählige), e che principalmente le zone del dodecaedro sono quelle che predominano. Come figura fondamentale dodecaedrica appa-

(1) Zeit. f. Kr. *35*, 50; *39*, 411.
(2) Zeit. f. Kr. *39*, 360.
(3) Zeit. f. Kr. *40*, 543.
(4) C. M. Viola, *Grundzüge der Kristallographie*. Leipzig, 1904, pag. 109.

riscono le 4 zone MTl , lPp , TPo , Mop meglio ed uniformemente sviluppate; onde si assumeranno quali faccie fondamentali $n(0\bar{2}1)$, $e(021)$, $y(\bar{2}01)$ anzichè h , M , P. Tali faccie appariscono fondamentali anche seguendo il sistema di posizione del sig. Fedorow.

I feldispati ci offrono dunque un bello e ricco esempio di trasformazione delle coordinate.

Il problema della trasformazione si riduce a questo: di assumere come nuove faccie fondamentali:

$$\begin{aligned} h' &\ldots (h_1' \ h_2' \ h_3') = (0\bar{2}1), \\ h'' &\ldots (h_1'' \ h_2'' \ h_3'') = (021), \\ h_1''' &\ldots (h_1''' \ h_2''' \ h_3''') = (\bar{2}01). \end{aligned}$$

In primo luogo si determinano nel modo solito le tre zone fondamentali:

$$\begin{aligned} x_1 &\ldots |h'' \ h'''| \ldots [r_1' \, r_1'' \, r_1'''] = [1\bar{1}2], \\ r_2 &\ldots |h''' \ h' \ | \ldots [r_2' \, r_2'' \, r_2'''] = [112], \\ r_3 &\ldots |h' \ h'' \ | \ldots [r_3' \, r_3'' \, r_3'''] = [\bar{2}00] \ (^1). \end{aligned}$$

E per avere gli indici di qualsivoglia faccia x, il cui simbolo nell'orientazione monoclina o triclina è noto $(x_1 \, x_2 \, x_3)$, applicheremo le relazioni $(3)_a$. Esse ci dànno come indici del nuovo simbolo:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - x_2 + 2x_3, \\ x_2' &= x_1 + x_2 + 2x_3, \\ x_3' &= -2x_1. \end{aligned}$$

È evidente che la faccia unitaria (111) nel monoclino o triclino, non rimarrà faccia unitaria dopo eseguita la trasformazione con le ultime equazioni. Infatti facendo in queste equazioni $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, si avrà, come nuovi indici a_1' , a_2' , a_3' di questa vecchia faccia unitaria, i seguenti:

$$\begin{aligned} a_1' &= 1 - 1 + 2 = 2, \\ a_2' &= 1 + 1 + 2 = 4, \\ a_3' &= -2. \end{aligned}$$

Dunque la vecchia faccia unitaria nel monoclino o triclino avrà nella posizione pseudododecaedrica il nuovo simbolo $(12\bar{1})$.

All'opposto, facendo nelle precedenti equazioni $x_1' = x_2' = x_3' = 1$, si otterranno gli indici vecchi z_1 , z_2 , z_3 di quella faccia, la quale nella orientazione pseudododecaedrica diviene faccia unitaria, ammesse le equazioni di trasformazione sopra indicate; questi vecchi indici saranno dunque:

$$\begin{aligned} z_1 &= \ \ 0 + 0 - 2 = \bar{2}, \\ z_2 &= -2 + 2 + 0 = 0, \\ z_3 &= +1 + 1 + 1 = 3. \end{aligned}$$

(1) $[\bar{2}00]$ in luogo del simbolo comune $[100]$ per soddisfare alla condizione $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3$; vedi equazioni (2).

Ossia la faccia che nella posizione monoclina o triclina ha per simbolo $(\bar{2}03)$ diviene nella posizione dodecaedrica la faccia unitaria (111).

Ecco ora qui appresso i simboli delle principali coppie di faccie dei feldispati prima e dopo la voluta trasformazione:

Faccie	Simboli nella orientazione monoclina e triclina.	Simboli nella orientazione dodecaedrica.	
M	(010)	$(\bar{1}10)$	$\}110\{$
l	(110)	$(01\bar{1})$	
T	$(1\bar{1}0)$	$(10\bar{1})$	
P	(001)	(110)	
o	$(\bar{1}11)$	(011)	
p	$(\bar{1}\bar{1}1)$	(101)	
n	$(0\bar{2}1)$	(100)	$\}100\{$
e	(021)	(010)	
y	$(\bar{2}01)$	(001)	
h	(100)	$(11\bar{2})$	$\}1\bar{2}1\{$
f	(130)	$(1\bar{2}1)$	
z	$(1\bar{3}0)$	$(\bar{2}11)$	
q	$(\bar{2}03)$	(111)	$\}111\{$
v	$(\bar{2}\bar{4}1)$	$(1\bar{1}1)$	
	(201)	$(\bar{1}11)$	
w	$(\bar{2}41)$	$(\bar{1}\bar{1}1)$	

ecc. ecc.

Ognun vede che la nuova denominazione, oltre che essere più semplice della vecchia, dà l'impronta della vera figura fondamentale dei feldispati, secondo quanto l'esperienza è venuta fin qui a stabilire.

Se nella eseguita trasformazione si fosse partiti dai simboli $(0\bar{2}1)$, (021), $(\bar{4}02)$, il risultato sarebbe assolutamente identico. Infatti in tale caso si avrebbe per simboli delle zone r_1, r_2, r_3 risp. $[1\bar{1}2]$, $[112]$, $[\bar{1}00]$ in luogo di $[\bar{2}00]$ come precedentemente; e quindi per indici nuovi della faccia x i seguenti:

$$x_1'' = x_1 - x_2 + 2x_3,$$
$$x_2'' = x_1 + x_2 + 2x_3,$$
$$x_3'' = -x_1.$$

Ma allora come faccia unitaria dopo la trasformazione sarà $(\bar{1}01)$. Volendo che, come dianzi, la faccia unitaria sia $(\bar{2}03)$, bisognerà trovare il nuovo sim-

bolo di questa, facendo uso delle ultime equazioni di trasformazione. Si avrà come nuovo simbolo di quest'ultima (221); epperò come indici nuovi della faccia x si prenderanno i rapporti:

$$\frac{x_1''}{2} : \frac{x_2''}{2} : \frac{x_3''}{1}$$

vale a dire:

$$x_1 - x_2 + 2x_3 : x_1 + x_2 + 2x_3 : -2x_1$$

che sono identici a quelli trovati sopra, cioè $x_1' : x_2' : x_3'$.

Vedremo in un'altra Nota come le regole per la trasformazione degli indici di una faccia sono suscettibili in pratica di una maggiore semplicità.

Antropologia. — *Cranî preistorici del Foro Romano.* Nota del Socio A. Mosso.

Questo lavoro sarà pubblicato nelle *Notizie degli Scavi.*

Matematica — *Sur le développement en fraction continue de la fonction* Q *de M. Prym.* Nota di Niels Nielsen, presentata dal Socio U. Dini.

Il est très connu que Laplace (1) a trouvé *formellement*, en transformant une série divergente, une fraction continue que représente la fonction transcendante entière

$$(1) \qquad L(x) = \int_x^\infty e^{-t^2}\, dt$$

qui a été étudiée par Kramp (2) aussi, tandis que Soldner (3) a appliqué la même méthode illégitime pour développer en fraction continue le logarithme-intégral, savoir la fonction

$$(2) \qquad li(e^{-x}) = -\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, dt.$$

Plus tard Jacobi (4) a démontré rigoureusement la formule de Laplace, tandis que celle de Soldner n'a été démontrée pas encore, à ce que je crois.

(1) *Mécanique céleste*, t. IV, livre 10.
(2) *Analyse des réfractions astronomiques et terrestres.* Strasbourg, 1799.
(3) *Théorie et tables d'une nouvelle fonction transcendante.* Munich, 1809.
(4) Journal de Crelle, t. 12, pp. 346-347, 1834.

Or, il est bien remarquable, ce me semble, qu'il est très facile de rendre rigoureuse la méthode illégitime appliquée par Laplace et Soldner et cela d'un point de vue général qui nous permet de déduire immédiatement des résultats analogues trouvés en détournant des difficultés considérables par Legendre (1), Laguerre (2) et M. Tannery (3).

A cet effet, nous avons à démontrer un théorème, nouveau je crois, concernant la méthode que Gauss (4) a appliquée dans ses recherches sur la série hypergéométrique, savoir le théoreme:

Appliquons formellement sur la série hypergéométrique toujours divergente:

$$\lim_{k=\infty} F(\nu, \varrho, k, -kx) \tag{3}$$

la méthode de Gauss, nous aurons une fraction continue qui est certainement convergente pour des valeurs finies réelles de ν et ϱ, pourvu que x soit une quantité positive et finie.

Quant à la démonstration de ce théorème, prenons pour point de départ l'intégrale définie

$$U^{\nu,\varrho}(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-tx}\, t^{\nu-1}}{(1+t)^\varrho}\, dt \tag{4}$$

qui a un sens, pourvu que les parties réelles de x et de ν soient positives; le chemin d'intégration coïncide avec l'axe des nombres positifs.

Appliquons ensuite la série de Taylor

$$(1+t)^{-\varrho} = \sum_{s=0}^{s=n-1} \binom{-\varrho}{s} \cdot t^s + R_n,$$

nous avons ce développement asymptotique (5)

$$U^{\nu,\varrho}(x) = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{\binom{-\varrho}{s} \cdot \Gamma(\nu+s)}{x^{\nu+s}} + R'_n, \tag{5}$$

ce qui nous conduira précisément à la série divergente (3), abstraction faite d'un simple facteur.

Cela posé, une intégration par parties donnera immédiatement, en vertu de (4), si nous y mettons $\nu+1$ au lieu de ν, cette équation fonctionnelle

$$x \cdot U^{\nu+1,\varrho}(x) = \nu \cdot U^{\nu,\varrho}(x) - \varrho \cdot U^{\nu+1,\varrho+1}(x), \tag{6}$$

(1) *Traité des fonct. ellipt. et des intégrales eulériennes*, t. II, pag. 509, Paris, 1826.

(2) Bull. de la Soc. Math. de France, t. 7, pp. 72-81, 1879. Oeuvres, t. I, pp. 428-437.

(3) Comptes Rendus, t. 94, pp. 1698-1701; t. 95, pag. 75, 1882.

(4) Comment. Gotting., t. 2, pag. 13, 1812. Oeuvres, t. III, pag. 134.

(5) Voir mon Mémoire: *Sur une intégrale définie*, inséré dans les Mathematische Annalen, t. 59, pp. 89-102, 1904.

d'où, après une légère transformation:

$$(7)\qquad \left\{ \frac{U^{\nu+1,\rho}(x)}{U^{\nu,\rho}(x)} = \frac{\nu}{x + \dfrac{\varrho}{\dfrac{U^{\nu+1,\rho}(x)}{U^{\nu+1,\rho+1}(x)}}} \right. ;$$

appliquons ensuite l'identité évidente:

$$t^{\nu+1}(1+t)^{-\rho-1} = t^{\nu}(1+t)^{-\rho} - t^{\nu}(1+t)^{-\rho-1},$$

il résulte de même, en vertu de (4)

$$U^{\nu+2,\rho+1}(x) = U^{\nu+1,\rho}(x) - U^{\nu+1,\rho+1}(x),$$

d'où, à l'aide de (7), la fraction continue cherchée

$$(8)\qquad \left\{ \frac{U^{\nu+1,\rho}(x)}{U^{\nu,\rho}(x)} = \frac{\nu}{x + \dfrac{\varrho}{1 + \dfrac{U^{\nu+2,\rho+1}(x)}{U^{\nu+1,\rho+1}(x)}}} \right. ,$$

dont la loi est évidente.

Supposons maintenant *positive* la variable x et *réels* les paramètres ν et ϱ, les quantités $\nu + n$ et $\varrho + n$ finissent toujours par être *positives*, et c'est la même chose avec le terme complémentaire

$$U^{\nu+n+1,\rho+n}(x) : U^{\nu+n,\rho+n}(x),$$

ce qui nous conduira précisément au théorème que nous venons d'énoncer.

Cela posé, mettons dans (3) $\varrho = 1$, puis introduisons la fonction

$$(9)\qquad Q(x, \nu) = \int_x^{\infty} e^{-t}\, t^{\nu-1}\, dt,$$

il est évident que cette fonction est une transcendante entière de ν, pourvu que x soit une quantité finie différente de zéro. M. Mellin [1] a indiqué cette autre formule intégrale

$$(10)\qquad \Gamma(\nu)\, e^{x} \cdot Q(x, 1-\nu) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-tx}\, t^{\nu-1}}{1+t}\, dt,$$

où il faut admettre que les parties réelles de x et de ν soient positives, ce qui donnera

$$(11)\qquad U^{\nu,1}(x) = \Gamma(\nu)\, e^{x}\, Q(x, 1-\nu).$$

Appliquons ensuite dans (9) l'intégration par parties, il résulte

$$\nu \cdot Q(x, \nu) = Q(x, \nu+1) - e^{-x} \cdot x^{\nu},$$

[1] Voir mon *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*, pag. 211, Leipzig, 1906, chez B-G. Teubner.

d'où, en vertu de (11),

$$\frac{U^{\nu,1}(x)}{U^{\nu-1,1}(x)} = \frac{(\nu-1)\,Q(x,1-\nu)}{Q(x,2-\nu)} = -1 + \frac{e^{-x}\cdot x^{1-\nu}}{Q(x,2-\nu)}.$$

Mettons ensuite dans (8) $\varrho = 1$, puis introduisons $1-\nu$ au lieu de ν, il résulte la fraction continue de Legendre

$$(12)\qquad Q(x,\nu) = \cfrac{e^{-x}x^{\nu}}{x+\cfrac{1-\nu}{1+\cfrac{1}{x+\cfrac{2-\nu}{1+\cfrac{2}{x+\cfrac{3-\nu}{1+\cfrac{3}{x+\cdots}}}}}}}$$

qui est certainement convergente, pourvu que ν soit *réel*, tandis que x doit être *positif*.

Cela posé, appliquons ces deux identités évidentes

$$(13)\qquad li(e^{-x}) = -Q(x,0)\quad,\quad L(x) = \tfrac{1}{2}\cdot Q(x^2,\tfrac{1}{2}),$$

nous aurons de (12), en y mettant $\nu = 0$, la fraction continue de Soldner

$$(14)\qquad -e^{x}\,li(e^{-x}) = \cfrac{\frac{1}{x}}{1+\cfrac{\frac{1}{x}}{1+\cfrac{\frac{1}{x}}{1+\cfrac{\frac{2}{x}}{1+\cfrac{\frac{2}{x}}{1+\cfrac{\frac{3}{x}}{1+\cfrac{\frac{3}{x}}{1+\cdots}}}}}}}$$

tandis que l'hypothèse $\nu = \frac{1}{2}$ donnera de même la fraction continue de

Laplace

$$(15)\qquad \left\{ e^{x^2}\,\mathrm{L}(x) = \cfrac{\frac{1}{2x}}{1+\cfrac{\frac{1}{2x^2}}{1+\cfrac{\frac{2}{2x^2}}{1+\cfrac{\frac{3}{2x^2}}{1+\cfrac{\frac{4}{2x^2}}{1+\cdots}}}}} \right.$$

Étudions ensuite les réduites de la fraction continue de Legendre ou, ce qui revient au même, de celle-ci:

$$\frac{e^{-x}\,x^{\nu-1}}{\mathrm{Q}(x,\nu)} = 1+\cfrac{\frac{1-\nu}{x}}{1+\cfrac{\frac{1}{x}}{1+\cfrac{\frac{2-\nu}{x}}{1+\cfrac{\frac{2}{x}}{1+\cdots}}}},$$

désignons par

$$\frac{f_0\left(\frac{1}{x}\right)}{g_0\left(\frac{1}{x}\right)}\ ,\ \frac{f_1\left(\frac{1}{x}\right)}{g_1\left(\frac{1}{x}\right)}\ ,\ \frac{f_2\left(\frac{1}{x}\right)}{g_2\left(\frac{1}{x}\right)}\ ,\ \ldots$$

ces réduites, nous aurons

$$f_0\left(\frac{1}{x}\right)=1\quad,\quad f_1\left(\frac{1}{x}\right)=1+\frac{1-\nu}{x}$$
$$g_0\left(\frac{1}{x}\right)=1\quad,\quad g_1\left(\frac{1}{x}\right)=1,$$

et il est évident que les numérateurs et les dénominateurs de nos réduites ultérieures doivent satisfaire à ces équations fonctionnelles

$$(16)\qquad \mathrm{F}_{2n}\left(\frac{1}{x}\right)=\mathrm{F}_{2n-1}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{n}{x}\cdot\mathrm{F}_{2n-2}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$(17)\qquad \mathrm{F}_{2n+1}\left(\frac{1}{x}\right)=\mathrm{F}_{2n}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{n+1-\nu}{x}\cdot\mathrm{F}_{2n-1}\left(\frac{1}{x}\right),$$

où nous avons posé pour abréger $\mathrm{F}_n = f_n$ ou bien $\mathrm{F}_n = g_n$.

Cela posé, la conclusion ordinaire de n à $n+1$ donnera sans peine pour les numérateurs ces expressions générales:

$$(18)\quad f_{2n}\left(\frac{1}{x}\right)=1+\sum_{s=1}^{s=n}\binom{n}{s}\cdot\frac{(n+1-\nu)(n-\nu)\dots(n-s+2-\nu)}{x^s}$$

$$(19)\quad f_{2n+1}\left(\frac{1}{x}\right)=1+\sum_{s=1}^{s=n+1}\binom{n+1}{s}\cdot\frac{(n+1-\nu)(n-\nu)\dots(n-s+2-\nu)}{x^s},$$

tandis qu'il ne semble pas possible de donner sous simple forme l'expression générale du dénominateur g_n. Le cas particulier de (18) qui correspond à $\nu=0$ a été connu par Laguerre.

Éliminons maintenant de (16) la fonction F_{2n-1}, ce qui s'effectuera en appliquant (17), puis traitons de la même manière la formule nouvelle ainsi obtenue, il résulte cette autre équation fonctionnelle

$$(20)\quad F_{2n}\left(\frac{1}{x}\right)=\left(1+\frac{2n-\nu}{x}\right)F_{2n-2}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{(n-1)(n-\nu)}{x^2}\cdot F_{2n-4}\left(\frac{1}{x}\right),$$

tandis que (17) donnera par le même procédé cette formule analogue

$$(21)\quad F_{2n+1}\left(\frac{1}{x}\right)=\left(1+\frac{2n+1-\nu}{x}\right)F_{2n-1}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{n(n-\nu)}{x^2}\cdot F_{2n-3}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Cela posé, mettons pour abréger

$$(22)\quad x^n\cdot g_{2n+1}\left(\frac{1}{x}\right)=\varphi_{n+1}(x)\quad,\quad x^{n+1}f_{2n+1}\left(\frac{1}{x}\right)=\psi_{n+1}(x),$$

nous aurons

$$(23)\quad \lim_{n=\infty}\frac{\varphi_n(x)}{\psi_n(x)}=\lim_{n=\infty}\frac{\frac{1}{x}g_{2n-1}\left(\frac{1}{x}\right)}{f_{2n-1}\left(\frac{1}{x}\right)}=e^{\alpha}x^{-\nu}\cdot Q(x,\nu);$$

combinons ensuite les deux formules (21) et (22), il résulte ces deux équations fonctionelles:

$$\varphi_{n+1}(x)=(x+2n+1-\nu)\varphi_n(x)-n(n-\nu)\varphi_{n-1}(x)$$
$$\psi_{n+1}(x)=(x+2n+1-\nu)\psi_n(x)-n(n-\nu)\psi_{n-1}(x),$$

d'où sans peine, en vertu de (23), cette fraction continue

$$(24)\quad Q(x,\nu)=\cfrac{e^{-\alpha}x^{\nu}}{x+1-\nu-\cfrac{1\cdot(1-\nu)}{x+3-\nu-\cfrac{2\cdot(2-\nu)}{x+5-\nu-\cfrac{3\cdot(3-\nu)}{x+7-\nu-\cdots}}}}$$

qui est certainement convergente pour x *positif* et ν *réel.*

Mettons dans (24) $x = 1$, il résulte la fraction continue de M. J. Tannery, tandis que l'hypothèse $\nu = 0$ nous conduira à celle que Laguerre a déduite pour le logarithme-intégral. Remarquons encore que l'hypothesè $\nu = \frac{1}{2}$ donnera immédiatement la fraction continue pour la fonction $\mathrm{L}(x)$ mentionnée par Laguerre.

Posons ensuite

$$(25) \qquad x^n g_{2n}\left(\frac{1}{x}\right) = \varphi'_n(x) \quad , \quad x^{n+1} f_{2n}\left(\frac{1}{x}\right) = \psi'_n(x),$$

il résulte cette valeur limite

$$(26) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\varphi'_n(x)}{\psi'_n(x)} = e^{x}\, x^{-\nu} \cdot \mathrm{Q}(x, \nu),$$

tandis que la formule (20) donnera ces deux autres

$$\varphi'_n(x) = (x + 2n - \nu)\, \varphi'_{n-1}(x) - (n-1)(n-\nu)\, \varphi'_{n-2}(x)$$
$$\psi'_n(x) = (x + 2n - \nu)\, \psi'_{n-1}(x) - (n-1)(n-\nu)\, \psi'_{n-2}(x),$$

d'où cette autre fraction continue

$$(27) \quad \left\{ \mathrm{Q}(x, \nu) = \cfrac{e^{-x} \cdot x^{\nu}}{x + \cfrac{(1-\nu)x}{x + 1 - \cfrac{1 \cdot (2-\nu)x}{x + 2 - \nu - \cfrac{2 \cdot (3-\nu)}{x + 4 - \nu - \cfrac{3 \cdot (4-\nu)}{x + 6 - \nu - \cdots}}}}} \right.$$

qui semble être nouvelle.

Il est évident que la fraction continue (27), convergente pour ν *réel* et x *positif*, nous permet de déduire immédiatement des fractions continues pour les deux fonctions $\mathrm{L}(x)$ et $li(e^{-x})$, analogues à celle de Laguerre.

Meccanica. — *Sulla deformazione di un ellissoide elastico.* Nota di Tommaso Boggio, presentata dal Corrispondente C. Somigliana.

In questa Nota espongo un procedimento assai semplice per determinare, nel campo racchiuso da un ellissoide, tre funzioni che verificano un certo sistema di tre equazioni indefinite di secondo ordine, e di tre equazioni ai limiti di primo ordine.

Come casi particolari si ottiene l'integrazione delle equazioni dell'equilibrio di un ellissoide elastico, soggetto a tensioni date, agenti sul contorno, nel caso in cui le componenti delle tensioni siano il prodotto di polinomi di un grado qualunque, per la distanza del centro dell'ellissoide dal piano

tangente; ovvero l'integrazione delle equazioni di un ellissoide elastico, soggetto a riscaldamento, supponendo che il riscaldamento sia rappresentato da un polinomio.

1. Consideriamo il campo S racchiuso dall'ellissoide σ di equazione:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0, \tag{1}$$

e denotiamo con P la distanza del centro di σ dal piano tangente in un punto qualunque (x, y, z) di σ, con n la normale a σ diretta all'interno di S.

Indichiamo poi, per brevità, genericamente con Δ_{rs} un'operazione differenziale lineare, omogenea di 2° ordine, della forma:

$$\Delta_{rs}=a_{rs}\frac{d^2}{dx^2}+b_{rs}\frac{d^2}{dy^2}+c_{rs}\frac{d^2}{dz^2}+h_{rs}\frac{d^2}{dx\,dy}+k_{rs}\frac{d^2}{dx\,dz}+l_{rs}\frac{d^2}{dy\,dz},$$

ove $a_{rs}, b_{rs} \ldots l_{rs}$ sono coefficienti costanti conosciuti, e con D_{rs} un'espressione lineare, omogenea di 1° ordine della forma:

$$D_{rs}=\alpha_{rs}\frac{d\xi}{dx}+\alpha'_{rs}\frac{d\xi}{dy}+\alpha''_{rs}\frac{d\xi}{dz}+\beta_{rs}\frac{d\eta}{dx}+\beta'_{rs}\frac{d\eta}{dy}+\beta''_{rs}\frac{d\eta}{dz}+$$
$$+\gamma_{rs}\frac{d\zeta}{dx}+\gamma'_{rs}\frac{d\zeta}{dy}+\gamma''_{rs}\frac{d\zeta}{dz},$$

in cui $\alpha_{rs}, \alpha'_{rs}, \ldots, \gamma''_{rs}$ sono coefficienti costanti dati e ξ, η, ζ funzioni incognite.

Ciò posto, cerchiamo tre funzioni ξ, η, ζ, regolari in S, che verifichino in S le equazioni indefinite:

$$\begin{cases} \Delta_{11}\xi+\Delta_{12}\eta+\Delta_{13}\zeta=0 \\ \Delta_{21}\xi+\Delta_{22}\eta+\Delta_{23}\zeta=0 \\ \Delta_{31}\xi+\Delta_{32}\eta+\Delta_{33}\zeta=0, \end{cases} \tag{2}$$

e nei punti di σ le equazioni ai limiti:

$$\begin{cases} D_{11}\frac{dx}{dn}+D_{12}\frac{dy}{dn}+D_{13}\frac{dz}{dn}=F\cdot P \\ D_{21}\frac{dx}{dn}+D_{22}\frac{dy}{dn}+D_{23}\frac{dz}{dn}=G\cdot P \\ D_{31}\frac{dx}{dn}+D_{32}\frac{dy}{dn}+D_{33}\frac{dz}{dn}=H\cdot P, \end{cases} \tag{3}$$

ove F, G, H sono funzioni regolari date.

Supporremo ancora che le costanti $a_{rs}, \ldots, l_{rs}, \ldots, \alpha_{rs}, \ldots, \gamma''_{rs}$ siano tali che i sistemi (2), (3) non ammettano più di una soluzione, cioè, in altri termini, che se le funzioni F, G, H sono nulle in ogni punto di σ, le funzioni ξ, η, ζ siano identicamente nulle in ogni punto di S.

E noto intanto che i coseni degli angoli che la normale interna all'ellissoide fa cogli assi coordinati sono dati da:

$$(4)\qquad \frac{dx}{dn} = -\frac{x}{a^2}P \quad , \quad \frac{dy}{dn} = -\frac{y}{b^2}P \quad , \quad \frac{dz}{dn} = -\frac{z}{c^2}P,$$

perciò dalle (3) si ha:

$$\begin{cases} D_{11}\frac{x}{a^2} + D_{12}\frac{y}{b^2} + D_{13}\frac{z}{c^2} = -F \\ D_{21}\frac{x}{a^2} + D_{22}\frac{y}{b^2} + D_{23}\frac{z}{c^2} = -G \\ D_{31}\frac{x}{a^2} + D_{32}\frac{y}{b^2} + D_{33}\frac{z}{c^2} = -H\,. \end{cases}$$

Queste equazioni sussistono nei punti di σ, per conseguenza, nel campo S, si può porre:

$$(5)\qquad \begin{cases} D_{11}\frac{x}{a^2} + D_{12}\frac{y}{b^2} + D_{13}\frac{z}{c^2} = -F + \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)\cdot\lambda(x,y,z) \\ D_{21}\frac{x}{a^2} + D_{22}\frac{y}{b^2} + D_{23}\frac{z}{c^2} = -G + \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)\cdot\mu(x,y,z) \\ D_{31}\frac{x}{a^2} + D_{32}\frac{y}{b^2} + D_{33}\frac{z}{c^2} = -H + \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)\cdot\nu(x,y,z), \end{cases}$$

essendo λ, μ, ν tre funzioni regolari nei punti di S.

2. Supponendo ora che F, G, H siano polinomi di grado m, cioè siano esprimibili mediante le formole:

$$(6)\qquad \begin{cases} F = \sum_{0,r,s,t}^{m} A_{r,s,t}\, x^r y^s z^t \\ G = \sum_{0,r,s,t}^{m} B_{r,s,t}\, x^r y^s z^t \qquad (r+s+t \leq m) \\ H = \sum_{0,r,s,t}^{m} C_{r,s,t}\, x^r y^s z^t\,, \end{cases}$$

le A, B, C essendo coefficienti costanti dati, è facile dimostrare che anche le funzioni ξ, η, ζ saranno polinomi di grado m.

Infatti esprimiamo ξ, η, ζ colle formole:

$$(7)\qquad \begin{cases} \xi = \sum_{0,r,s,t}^{m} a_{r,s,t}\, x^r y^s z^t \\ \eta = \sum_{0,r,s,t}^{m} b_{r,s,t}\, x^r y^s z^t \qquad (r+s+t \leq m) \\ \zeta = \sum_{0,r,s,t}^{m} c_{r,s,t}\, x^r y^s z_i\,, \end{cases}$$

ove a, b, c sono coefficienti costanti da determinarsi, ed assumiamo λ, μ, ν, che saranno in conseguenza polinomi di grado $m-2$, sotto la forma:

$$\begin{cases} \lambda = \sum_{0}^{m-2}{}_{r,s,t} \alpha_{r,s,t} x^r y^s z^t \\ \mu = \sum_{0}^{m-2}{}_{r,s,t} \beta_{r,s,t} x^r y^s z^t \qquad (r+s+t \leq m-2) \\ \nu = \sum_{0}^{m-2}{}_{r,s,t} \gamma_{r,s,t} x^r y^s z^t , \end{cases}$$

le α, β, γ indicando altri coefficienti da determinarsi.

Sostituendo i valori precedenti nelle (2), (5) si hanno tre equazioni di grado m, e tre equazioni di grado $m-2$ nelle variabili x, y, z; perciò identificando nei due membri di ognuna di esse i coefficienti dei termini simili si hanno complessivamente:

$$N = 3\binom{m+3}{3} + 3\binom{m+1}{3}$$

equazioni lineari fra i coefficienti $a_{r,s,t}, \ldots, \alpha_{r,s,t}, \ldots, \gamma_{r,s,t}$, che in tutto sono evidentemente pure in numero di N.

Abbiamo dunque un sistema $\sum$ di N equazioni lineari con N incognite: queste equazioni saranno poi compatibili, cioè il determinante dei loro coefficienti sarà certamente diverso da zero; poichè, nel caso contrario, attribuendo alle costanti A, B, C il valore zero (ossia, a tenore delle (6), ritenendo nulle le funzioni F, G, H) le equazioni di $\sum$ diventerebbero omogenee, e allora sarebbero soddisfatte da valori non tutti nulli delle incognite, e perciò esisterebbero tre funzioni ξ, η, ζ, non nulle in S, e che verificherebbero le (2), (3) nel caso in cui $F = G = H = 0$: e ciò contraddice all'ipotesi fatta nel § 1 circa i sistemi (2), (3).

Dal sistema $\sum$ potremo dunque ricavare le incognite $a_{r,s,t}, \ldots, \gamma_{r,s,t}$, e in tal modo risulteranno note, mediante le (7), le funzioni ξ, η, ζ che risolvono la questione proposta.

È chiaro che il precedente metodo d'integrazione può applicarsi al caso di quante si vogliano variabili, e anche nell'ipotesi che l'equazione dell'ellissoide, anzichè sotto la forma (1), sia data sotto la forma più generale.

3. Supponiamo ora che lo spazio S sia occupato da un corpo elastico isotropo, sul contorno del quale agiscano delle tensioni, le cui componenti siano date da:

$$F \cdot P \quad , \quad G \cdot P \quad , \quad H \cdot P,$$

ove F, G, H sono polinomi noti di grado m.

Indicando con ξ, η, ζ le componenti dello spostamento di un punto qualunque di S, dovranno essere soddisfatte in S le equazioni indefinite:

$$(8)\qquad \begin{cases} \Delta_2 \xi + \dfrac{1}{1-2\varkappa}\dfrac{d\theta}{dx} = 0 \\ \Delta_2 \eta + \dfrac{1}{1-2\varkappa}\dfrac{d\theta}{dy} = 0 \\ \Delta_2 \zeta + \dfrac{1}{1-2\varkappa}\dfrac{d\theta}{dz} = 0, \end{cases} \qquad \left(\begin{matrix} \Delta_2 = \dfrac{d^2}{dx^2} + \dfrac{d^2}{dy^2} + \dfrac{d^2}{dz^2} \\ \theta = \dfrac{d\xi}{dx} + \dfrac{d\eta}{dy} + \dfrac{d\zeta}{dz} \end{matrix} \right)$$

e sopra σ le equazioni ai limiti:

$$(9)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{2\varkappa}{1-2\varkappa}\theta + 2\dfrac{d\xi}{dx}\right)\dfrac{dx}{dn} + \left(\dfrac{d\eta}{dx} + \dfrac{d\xi}{dy}\right)\dfrac{dy}{dn} + \\ \qquad + \left(\dfrac{d\xi}{dz} + \dfrac{d\zeta}{dx}\right)\dfrac{dz}{dn} = -\dfrac{2(1+\varkappa)}{E}\,F \cdot P \\ \left(\dfrac{d\eta}{dx} + \dfrac{d\xi}{dy}\right)\dfrac{dx}{dn} + \left(\dfrac{2\varkappa}{1-2\varkappa}\theta + 2\dfrac{d\eta}{dy}\right)\dfrac{dy}{dn} + \\ \qquad + \left(\dfrac{d\zeta}{dy} + \dfrac{d\eta}{dz}\right)\dfrac{dz}{dn} = -\dfrac{2(1+\varkappa)}{E}\,G \cdot P \\ \left(\dfrac{d\xi}{dz} + \dfrac{d\zeta}{dx}\right)\dfrac{dx}{dn} + \left(\dfrac{d\zeta}{dy} + \dfrac{d\eta}{dz}\right)\dfrac{dy}{dn} + \\ \qquad + \left(\dfrac{2\varkappa}{1-2\varkappa}\theta + 2\dfrac{d\zeta}{dz}\right)\dfrac{dz}{dn} = -\dfrac{2(1+\varkappa)}{E}\,H \cdot P, \end{cases}$$

ove $\varkappa$, E sono costanti.

Dalle (8), (9) si deduce facilmente, com'è noto, che debbono essere soddisfatte le equazioni, che esprimono del resto condizioni d'equilibrio:

$$(10)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_\sigma FP\,d\sigma = \int_\sigma GP\,d\sigma = \int_\sigma HP\,d\sigma = 0, \\ \displaystyle\int_\sigma (yF - xG)\,P\,d\sigma = \int_\sigma (zF - xH)\,P\,d\sigma = \int_\sigma (zG - yH)\,P\,d\sigma = 0\,. \end{cases}$$

Poichè le (8), (9) sono un caso particolare delle (2), (3) ed è inoltre soddisfatta la condizione della unicità della soluzione, si conclude che per determinare le funzioni ξ, η, ζ basterà applicare il procedimento esposto nei paragrafi precedenti [1], e così si avrà la deformazione dell'ellissoide considerato [2].

[1] Le funzioni ξ, η, ζ risultano notoriamente determinate a meno di *sei* costanti, le quali corrispondono ad una traslazione e ad una rotazione del corpo, e poichè pure *sei* sono le equazioni (10), si conclude che nel sistema di equazioni lineari, corrispondente al sistema Σ, potremo omettere *sei* equazioni.

[2] Dal risultato ora stabilito appare l'utilità — mi dice il prof. Somigliana — di indagare se, e sotto quali condizioni, sia possibile rappresentare delle tensioni, date arbi-

La deformazione di un ellissoide nel caso in cui sul contorno si conoscono gli spostamenti, che siano espressi da polinomi, trovasi determinata in una mia Nota precedente (1); nel caso di un ellissoide di rotazione, e per spostamenti qualunque, la deformazione è stata determinata dal professore Tedone (2).

4. Supponiamo ora che il solido elastico isotropo S venga deformato per effetto del calore, e che inizialmente esso sia soggetto in ogni punto alla stessa temperatura.

Considerando allora un punto qualunque (x, y, z) di S e chiamando u, v, w le componenti dello spostamento di esso e Φ il riscaldamento a cui, in quel punto, si assoggetta il solido, dovranno essere soddisfatte, nei punti di S, le equazioni indefinite (3):

$$(11)\quad \begin{cases} \Delta_2 u + (1+2\varkappa)\dfrac{dp}{dx} = \varkappa' \dfrac{d\Phi}{dx} \\ \Delta_2 v + (1+2\varkappa)\dfrac{dp}{dy} = \varkappa' \dfrac{d\Phi}{dy} \\ \Delta_2 w + (1+2\varkappa)\dfrac{dp}{dz} = \varkappa' \dfrac{d\Phi}{dz}, \end{cases} \qquad \left(p = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right),$$

ove $\varkappa, \varkappa'$ sono costanti che dipendono dalla natura del solido.

Sulla superficie σ devono poi essere verificate le equazioni ai limiti:

$$(12)\quad \begin{cases} \left(p' + 2\dfrac{du}{dx}\right)\dfrac{dx}{dn} + \left(\dfrac{du}{dy} + \dfrac{dv}{dx}\right)\dfrac{dy}{dn} + \left(\dfrac{du}{dz} + \dfrac{dw}{dx}\right)\dfrac{dz}{dn} = 0 \\ \left(\dfrac{dv}{dx} + \dfrac{du}{dy}\right)\dfrac{dx}{dn} + \left(p' + 2\dfrac{dv}{dy}\right)\dfrac{dy}{dn} + \left(\dfrac{dv}{dz} + \dfrac{dw}{dy}\right)\dfrac{dz}{dn} = 0 \\ \left(\dfrac{dw}{dx} + \dfrac{du}{dz}\right)\dfrac{dx}{dn} + \left(\dfrac{dw}{dy} + \dfrac{dv}{dz}\right)\dfrac{dy}{dn} + \left(p' + 2\dfrac{dw}{dz}\right)\dfrac{dz}{dn} = 0 \end{cases}$$

ove:

$$p' = 2\varkappa p - \varkappa' \Phi.$$

---

trariamente sul contorno dell'ellissoide, nella forma di somme di polinomi moltiplicati per il fattore P.

(1) Boggio, *Sopra alcune funzioni armoniche o biarmoniche*, ecc. (Atti del R. Istituto Veneto, t. LX, parte 2ª, a. 1901).

(2) Tedone, *Sul problema dell'equilibrio elastico di un ellissoide di rotazione* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XIV, 1° sem. 1905).

(3) Cfr. Borchardt, *Gesammelte Werke*, pag. 250 (Berlin, a. 1888), ovvero: Cesàro, *Introduzione alla teoria matematica della Elasticità*, cap. XV (Torino, a. 1894).

Conviene ridurre le (11) a forma omogenea. Poniamo perciò:

$$(13)\qquad \begin{cases} u = \xi + \dfrac{d\mathrm{F}}{dx} \\ v = \eta + \dfrac{d\mathrm{F}}{dy} \\ w = \zeta + \dfrac{d\mathrm{F}}{dz}, \end{cases}$$

$$\theta = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz},$$

ove $\xi, \eta, \zeta, \mathrm{F}$ sono funzioni da determinarsi; le (11) diventano allora:

$$(11')\qquad \begin{cases} \Delta_2 \xi + (1+2\varkappa)\dfrac{d\theta}{dx} = \dfrac{d}{dx}[\varkappa' \Phi - 2(1+\varkappa)\Delta_2 \mathrm{F}] \\ \Delta_2 \eta + (1+2\varkappa)\dfrac{d\theta}{dy} = \dfrac{d}{dy}[\varkappa' \Phi - 2(1+\varkappa)\Delta_2 \mathrm{F}] \\ \Delta_2 \zeta + (1+2\varkappa)\dfrac{d\theta}{dz} = \dfrac{d}{dz}[\varkappa' \Phi - 2(1+\varkappa)\Delta_2 \mathrm{F}], \end{cases}$$

e se poi si determina la F in modo che sia verificata l'equazione:

$$(14)\qquad \Delta_2 \mathrm{F} = \frac{\varkappa'}{2(1+\varkappa)} \Phi$$

e sia regolare in S, le (11') si ridurranno alla forma omogenea:

$$(15)\qquad \begin{cases} \Delta_2 \xi + (1+2\varkappa)\dfrac{d\theta}{dx} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Eseguendo la sostituzione (13) le (12) diventano:

$$\begin{cases} \left(2\varkappa\theta + 2\dfrac{d\xi}{dx}\right)\dfrac{dx}{dn} + \left(\dfrac{d\xi}{dy} + \dfrac{d\eta}{dx}\right)\dfrac{dy}{dn} + \left(\dfrac{d\xi}{dz} + \dfrac{d\zeta}{dx}\right)\dfrac{dz}{dn} = \\ \qquad = (\varkappa' \Phi - 2\varkappa \Delta_2 \mathrm{F})\dfrac{dx}{dn} - 2\left(\dfrac{d^2\mathrm{F}}{dx^2}\dfrac{dx}{dn} + \dfrac{d^2\mathrm{F}}{dx\,dy}\dfrac{dy}{dn} + \dfrac{d^2\mathrm{F}}{dx\,dz}\dfrac{dz}{dn}\right) \\ \cdots\cdots\cdots\

Supponendo ora che il riscaldamento Φ sia un polinomio dato di grado m, potremo determinare un polinomio F, di grado $m+2$, che verifichi la (14) [1], e allora nelle (16) le espressioni entro le parentesi quadre risultano polinomi di grado $m+1$, perciò la ricerca delle funzioni ξ, η, ζ, che saranno pure polinomi di grado $m+1$, si può fare col procedimento adoperato per i sistemi (8), (9).

5. Come è già stato detto, le considerazioni dei §§ 1, 2 valgono per un numero qualunque di variabili: in particolare, per 2 variabili, permettono di determinare la deformazione di una piastra elastica, isotropa, piana, infinitamente sottile, non soggetta a forze di massa, e il cui contorno sia sollecitato da tensioni date, agenti nel piano della piastra, supponendo che le componenti di dette tensioni siano eguali al prodotto di un polinomio, di un grado qualunque m, per la distanza del centro dell'ellisse dalla tangente nel punto considerato.

Questa questione può però esser trattata, togliendo anche la restrizione ora posta circa le componenti della tensione, con un altro procedimento: infatti essa equivale [2] a quella di costruire la funzione biarmonica U nell'area considerata, conoscendo sul suo contorno i valori della U e della sua derivata normale. E poichè la determinazione della funzione U, nel caso dell'ellisse, si sa fare [3], si conclude che si saprà anche determinare la deformazione della piastra ellittica.

Fisica. — *Sulla radioattività dei fanghi termali depositati dalle acque degli Stabilimenti dei Bagni di Lucca (Toscana)* [4]. Nota del dott. G. Magri, presentata dal Corrispondente A. Battelli.

In questa Comunicazione riporto i risultati ottenuti dallo studio della radioattività dei fanghi e delle acque termali dei Bagni di Lucca. Lo studio fu già cominciato sul luogo, ove mi recai per incarico del prof. Ubaldo Antony. Al prof. Antony vadano quindi i miei ringraziamenti; così pure vadano al cav. dott. Adriano Bastiani per aver messo a mia disposizione il locale ed il materiale di studio. Degli stabilimenti da me visitati ricordo:

(1) Di questi polinomi ne esistono infiniti; si può ad esempio assumere quello che si annulla su σ e che si può ottenere facilmente come è mostrato nella mia Nota dell'Istituto Veneto già citata.

(2) Boggio, *Sulla deformazione delle piastre elastiche cilindriche di grossezza qualunque* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XIII, 2° sem. (1904); Lauricella, *Sulle equazioni della deformazione delle piastre elastiche cilindriche* (Id., vol, XIV, 1° sem. 1905).

(3) Boggio, *Integrazione dell'equazione* $\Delta_2 \Delta_2 = 0$ *in un'area ellittica* (Atti del R. Istituto Veneto, t. LX, parte 2ª, a. 1901).

(4) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica della R. Università di Pisa.

lo stabilimento dei « Bagni caldi », delle « Docce basse », « Bernabò » e della « Villa ».

Le acque che alimentano questi stabilimenti sgorgano da numerose sorgenti e sono in parte termali; queste ultime, che raggiungono alte temperature (fino a 54° 1), costituiscono la ricchezza degli stabilimenti. Esse contengono disciolti sali diversi (1) e depositano sul loro percorso ed in vasti serbatoi, appositamente costruiti, dei fiocchi leggieri, varianti dal color marrone al rosso e al giallo, i quali, raccogliendosi al fondo, costituiscono un « fango » molto apprezzato come uso terapeutico. Dalle scaturigini delle sorgenti termali dei vari stabilimenti non si sviluppano affatto dei gas, talchè le mie ricerche si dovettero limitare allo studio della radioattività dell'aria nelle vicinanze dello stabilimento principale (Bagni caldi), delle acque di questo stesso stabilimento e dei vari depositi ferruginosi delle sorgenti surricordate. Di questi depositi si occuparono già: incidentalmente il Moscheni in un interessante *Trattato dei Bagni di Lucca* (1792) e più tardi Davy, il quale ne fece il primo studio con una breve Comunicazione alla R. Accademia di Scienze di Napoli. Or non è molto il prof. Antony esaminando tali fanghi, potè riconoscere del manganese in quello del Doccione. Ho rivolto specialmente la mia attenzione a questi depositi che, come si vedrà più avanti, presentano un' attività molto notevole ed interessante.

Per lo studio questi fanghi venivano stacciati ancora molli per uno staccio a maglie non troppo strette e ciò non tanto per liberarli subito dai più grossi residui calcarei che si staccano dalla roccia su cui scorre l'acqua, quanto anche per raccoglierli come là si usa. Così stacciati e mantenuti sotto la propria acqua, i fanghi rimangono stabili e quando si vogliono esaminare non resta altro che seccarli prima a b. m. poi in stufa a secco fra 80° e 90°, stacciandoli poi nuovamente per uno staccio fine e prendendo la polvere. Ciò che rimane sullo staccio è ancora un po' attivo. Si capisce come la composizione di questi fanghi sia varia essendo essi mescolanze di idrati ossidi di ferro e di silice in rapporti abbastanza costanti, ma ancora in modo vario, di tutto ciò che può eventualmente trascinare l'acqua con sè. Sicchè la presa del campione è sempre incerta, ed è ben difficile poterne prendere due che si corrispondano perfettamente. Io ho distinto i fanghi in *aderenti*, quelli cioè che si depositano là ove scorre l'acqua e che richiedono un certo sforzo per essere staccati; ed in depositi soffici o *non aderenti*, quelli che si depositano al fondo ove l'acqua ristagna. Sembra che i depositi aderenti siano quelli che più degli altri si corrispondono campione a campione, a meno che non venga fatto, nel distaccarli, di portar via dei pezzi di roccia, come più volte mi è accaduto. Mi preme far notare subito che questi depositi aderenti

(1) *Relazione dell'analisi chimica dell'acqua del Doccione dei Bagni caldi.* U. Antony, 1904, Lucca, cart. e tipo-lit. Amedei.

sono i più attivi, sia perchè più vecchi, ma può darsi anche perchè meno inquinati da sostanze inerti.

Metodo di misura.

Ho studiato l'attività di tali fanghi misurando coi soliti sistemi la caduta in Volta del potenziale di carica di un elettroscopio. L'apparecchio che ho costruito è rappresentato sotto due forme nelle figure 1 e 2 (1). In sostanza

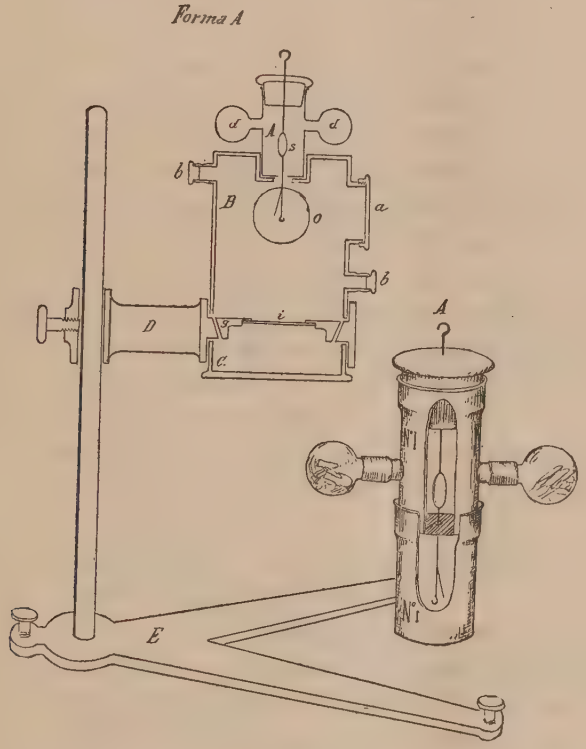


Fig. 1.

esso è un solo apparecchio cui si possono dare due disposizioni, sia che si voglia usare l'elettroscopio solo, sia che si voglia ad esso adattare un dispersore. Nella fig. 1 in basso è rappresentato l'elettroscopio costruito sul modello di quelli del Righi, cui ho dato la disposizione là raffigurata. L'isolante dell'elettroscopio è racchiuso in un piccolo ambiente, il quale non ha quasi scambio di gas coll'esterno ed è tenuto costantemente asciutto per mezzo di due ampolline di vetro laterali contenenti del sodio.

(1) Fu costruito dal meccanico dell'Istituto di Fisica di questa Università, Orfeo Di Nasso.

L'asticella cui è attaccata la foglia d'oro passa al di sotto del fondo del cilindro per un piccolo foro centrale; e siccome non è facile poter attaccare tutto ad un sistema rigido, data la difficoltà di costruire bene imperniato il filo che tiene lo zolfo, lo zolfo e l'asticella dell'elettroscopio, così il tappo superiore del cilindro è di sughero, e quando i vari pezzi si facciano con cura si può comodamente e facilmente centrare nel foro, l'asticella dell'elettroscopio. Nella fig. 1 è rappresentato l'astuccio che si applica per salvaguardare

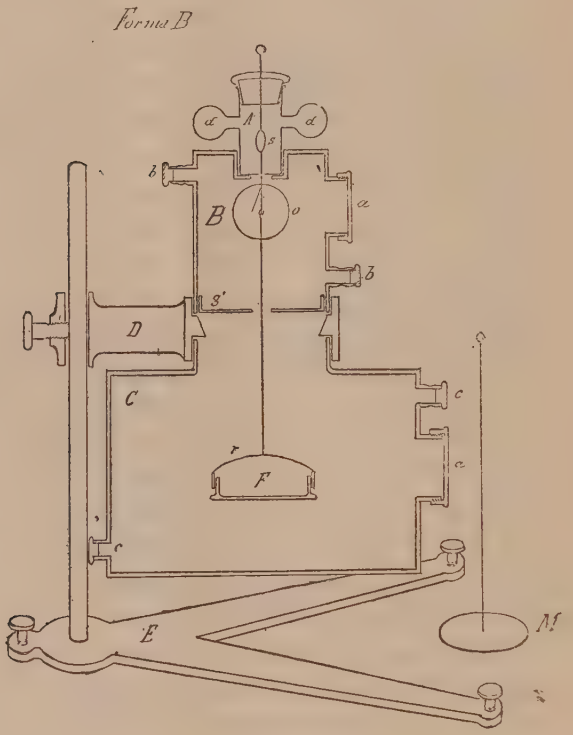


Fig. 2.

la foglia d'oro e rendere l'elettroscopio trasportabile. Il resto dell'apparecchio si comprende facilmente dalla sezione: la parte *A* che costituisce l'elettroscopio va a sfregamento e a tenuta al di sopra di una campana di ottone della capacità di circa cm^3 200. Questa campana porta due aperture opposte *o* che sono ricoperte da lastre di vetro e che servono per leggere, mediante un cannocchiale munito di micrometro oculare, gli spostamenti della fogliolina. L'apertura chiusa con un tappo a vite *a* serve per caricare l'elettroscopio, i due cannelli *b*, *b* per immettere dei gas nella campana od attaccarvi delle ampolline con sodio. La campana *B* per mezzo di due attacchi

che penetrano in due gole a baionetta si può fissare su di un anello *D* sorretto da un piede *E*. Una riparella di cuoio serve a rendere la chiusura perfetta. Al di sotto dell'anello penetra un coperchio di scatola *C*, pur esso attaccato nel modo suddetto e che serve per la sostanza in esame.

L'anello *D* porta inoltre un foro centrale tagliato ad imbuto, cui va a sfregamento un diaframma di ottone *g* che nel mezzo porta una sottile lamina circolare di alluminio in foglia *i* sorretta da due pezzi di rete a larghe maglie. Così l'ambiente in cui si trova l'elettroscopio resta perfettamente chiuso, separato dall'esterno, separato anche dalla camera ove si trova la sostanza radioattiva.

Si può anche usare l'apparecchio in un'altra maniera, qual'è quella rappresentata nella forma *B* della fig. 2. In questo caso al posto del coperchio *C* della fig. 1 si sostituisce la scatola cilindrica d'ottone *C* della fig. 2 imperniata nell'anello al solito modo. È tolto il diaframma di alluminio *i* descritto precedentemente, ed a questo ne è sostituito un altro *g'* che va a sfregamento nella campana *B* e che porta un foro di mm. 5 di diametro.

All'elettroscopio si unisce un dispersore formato da una scatola *F*, costituita da un piattello unito coi soliti attacchi ad un anello sormontato da una rete metallica a maglie abbastanza strette *r*. A questa rete è saldato un filo di ottone che sorregge tutta la scatola e che nella parte superiore è ricurvo e si attacca per il piccolo gancio all'asta dell'elettroscopio. La cassa grande *C* è munita di due tubicini *c c* per far circolare quando si voglia dei gas nella campana, e di un tappo a vite *a'* che serve volendo per caricare l'elettroscopio.

Per ricerche di radioattività indotta al cestello *F*, sostituivo dei dischi di argento simili a quelli disegnati in *M* (fig. 2).

Quest'elettroscopio, quando sia scelta con cura la fogliolina d'oro, si presta a dare letture precise, specialmento usando, come ho fatto io per questo scopo, un cannocchiale munito di micrometro oculare; cosicchè misure successive fatte sullo stesso fango danno resultati molto concordanti. Inoltre la quantità di sostanza necessaria per le misure è pochissima ed io non ho mai oltrepassato i 5 gr.: le misure qui riportate furono eseguite sempre su tale quantità di fango. Gli isolanti di zolfo presentano sempre un ottimo stato di isolamento.

Per avere la misura della radioattività della sostanza, caricavo negativamente il piccolo elettroscopio con una pila Zamboni attraverso l'apposita apertura, mediante un sottile filo metallico attaccato ad un estremo della pila.

Il massimo di deviazione dell'elettroscopio corrispondeva a 250 Volta. Poi determinavo successivamente la caduta del potenziale di carica dell'elettroscopio, prima e dopo aver posto la sostanza nel piattello *C*, riferendola al minuto primo.

Nelle mie determinazioni di rado spinsi la scarica dell' elettroscopio al di sotto di 100 Volta; ad ogni modo anche pei materiali più attivi mi mantenni sempre ad un potenziale sufficientemente elevato per non scendere al di sotto della corrente di saturazione. Questo lo dimostravano evidentemente le curve della dispersione dell' elettroscopio che erano molto vicine ad una retta, tranne qualche volta in cui col diminuire del potenziale aumentava un pochino la dispersione in virtù di una leggerissima attivazione che assumeva l'elettroscopio. Per questo la misura dell'attività mi veniva data senz'altro dalla dispersione in Volta per un minuto primo, corretta naturalmente della dispersione iniziale dell'elettroscopio.

Coll'elettroscopio della forma *B* operavo nello stesso modo. Interponevo almeno quattro ore fra una lettura e l'altra, perchè i valori della dispersione iniziale fossero sempre gli stessi e le osservazioni sui fanghi non fossero influenzate dalla leggiera attivazione che qualche volta acquistava l'elettroscopio. In generale ho sperimentato coll'apparecchio della forma *A* più comodo per queste ricerche; però ho osservato valori concordanti tra loro, usando sia l'una sia l'altra forma.

Sarebbe troppo lungo il descrivere singolarmente le diverse sorgenti dalle quali furono tolti i campioni dei fanghi; mi limiterò a ricordare che:

1. Nello stabilimento « Bagni caldi » si trovano due sorgenti: quella del « Doccione » e quella che alimenta il « Bagno dei poveri ».

2. Alimentano lo stabilimento delle « Docce basse » le sorgenti « Rossa », « Disperata », « Coronale », « Maritata », « Trastullina » e la « Gialla »; di quest'ultima non potei prendere campioni perchè era otturata.

3. Nello stabilimento « Bernabò » si trova una sorgente termale.

4. Lo stabilimento « alla Villa » pur esso è alimentato da un'unica sorgente termale.

Queste acque ricordate sono tutte termali, variando le temperature dall'una all'altra; io non misurai direttamente queste temperature, credendo di trovarle registrate nelle relazioni chimiche di tali acque che furono fatte a più riprese; disgraziatamente non tutte le sorgenti sono ricordate, specialmente nelle relazioni più recenti, talchè ho dovuto prendere le temperature in gradi Réaumur che dà il Moscheni.

Esperienze.

Nel seguente prospetto, ove raduno i risultati delle mie osservazioni, nella colonna delle temperature sotto R riporto quelle date dal Moscheni, e sotto C i gradi centigradi registrati dall'Antony (1).

(1) Relazione citata.

	FANGHI		Temperatura R	Temperatura C	Tempo	Grammi	Dispersione in Volta all'ora
Stabilimento dei Bagni Caldi	Sorgente Doccione	aderente	43	54,1	16 giorni	5	322,44
		non aderente			16 id.	5	283,08
		id.			più di 1 anno	5	280,10
	Sorgente del Bagno dei Poveri	aderente	43	44,5	16 giorni	5	143,74
		non aderente			16 id.	5	139,08
Stabilimento delle Docce Basse	Sorgente Rossa	aderente	38	41,5	17 giorni	5	1062,70
		non aderente			id.	5	259,36
	Sorgente Disperata	aderente	36		id.	5	488,13
		non aderente			id.	5	422,82
	Sorgente Coronale	aderente	35		18 giorni	5	668,88
		non aderente			id.	5	306,78
	Sorgente Maritata	aderente	35		id.	5	496,98
		non aderente			id.	5	875,30
	Sorgente Trastullina	aderente	29,5		19 giorni	5	281,52
Stabil. Bernabò	Sorgente Bernabò	non aderente	35	40	19 giorni	5	120,36
Stabilimento della Villa	Sorgente della Villa	aderente	33 3/4	39	19 giorni	5	1695,94
		non aderente			id.	5	836,28
	Campione di Pechblenda dell'Istituto di Chimica					0,20	1655,5

Dando uno sguardo alla tabella, ci possiamo facilmente convincere che i depositi *aderenti* sono in generale più attivi dei non aderenti; un'eccezione è presentata dal fango della sorgente « Maritata ».

I fanghi mantengono inalterata la loro attività anche col volger del tempo; campioni sperimentati successivamente diedero sempre lo stesso numero, e nella tabella è riportato un fango del « Doccione » il quale dopo più di un anno presenta sempre la stessa attività.

Quasi sempre si nota che i fanghi più attivi sono quelli deposti dalle acque a più bassa temperatura; e non solo col variare della temperatura cambia l'attività, ma cambiano ancora gli altri caratteri chimici e fisici: così il colore dei fanghi dal rosso-bruno pei « Bagni caldi » (54°,1) va al rosso-ocraceo della « Villa » e « Bernabò » (39° a 40°) fino al giallo-chiaro

dell'acqua « Gialla » (38°), mentre l'idrazione va aumentando via via che la temperatura si abbassa. Per altro da questa legge si scosta il fango « dei poveri » che dovrebbe dare dei valori un poco maggiori del « Doccione » e il fango « Bernabò »: però questi due depositi sono diversi da tutti gli altri per l'aspetto fisico almeno. Così pure un valore molto elevato si trova nel numero del fango aderente dell'acqua « Rossa ».

Queste divergenze in meno si potrebbero spiegare col fatto dell'impurità del campione e che il deposito della « Rossa » aderente abbia soggiornato molto tempo nei crepacci della roccia. Certo si è che da un minimo di 322 per i « Bagni caldi » si va salendo sino ad un massimo di 1695 di dispersione per la « Villa » e che il « Doccione » ha una temperatura molto più elevata di questa.

In fondo alla tabella è posto il valore ricavato dallo stesso apparecchio per due decigrammi di un vecchio campione di *Pechblenda* esistente nel nostro laboratorio; ciò feci allo scopo di poter fare dei confronti fra la grandezza della radioattività dei fanghi studiati e quella già nota della *Pechblenda*. Questa fu finamente polverizzata e distribuita nel piattello in modo che occupasse la maggiore superficie possibile.

Esaminai inoltre la radioattività indotta in oggetti di argento posti sia nell'aria della grotta a vapore, nell' acqua e nei fanghi dei « Bagni caldi »; e questa si mostrò molto evidente; così pure si mostrò molto maggiore l'attivazione acquistata da due piattelli d'argento caricati contemporaneamente ad uno stesso potenziale negativo e di cui uno nell'aria della grotta, l'altro nell'aria esterna dello stabilimento.

A queste ricerche eseguite coll'elettroscopio, corrispondono le proprietà dei fanghi di impressionare le lastre fotografiche. Le prove furono eseguite su lastre Lumière delle dimensioni 9×12 involte in carta nera. Su questa, dalla parte corrispondente alla gelatina, ponevo delle lettere di piombo grandi e spesse e poi spargevo da 20 a 25 gr. di fango bene asciutto sulle lettere e sulla carta nera ponendo tutto in scatole ben chiuse. Con pose varianti da 10 a 15 giorni si ottengono dei fotogrammi ben netti.

Esperienze di confronto eseguite con fanghi debolmente attivi di altre regioni, diedero dei risultati negativi.

Da tutto ciò che ho esposto si può tirare una conclusione importante: la grande radioattività che presentano i fanghi dei Bagni di Lucca. Per quanto io abbia letto sulle relazioni di autori diversi intorno all'attività dei fanghi termali, non ho visto rammentato alcun deposito che presenti in maniera così ragguardevole la radioattività che si riscontra nei fanghi da me studiati. Dato un prodotto così attivo, non deve essere impossibile il cercare di concentrare con qualche frazionamento sistematico la materia attiva, e conoscere così se questa debba ascriversi a Radio o piuttosto ad uno degli altri elementi radioattivi. Di questo studio stiamo occupandoci attualmente il prof. Antony ed io.

Fisica. — *Misura del coefficiente di attrito interno dell'aria a basse temperature* (1). Nota del dott. Silvio Chella, presentata dal Corrispondente A. Battelli.

La propagazione del movimento nei gas è stata l'oggetto delle più accurate ricerche da parte dei fisici, come quella che, legata direttamente al percorso medio molecolare, sembrava poter farci conoscere per la via più diretta la costituzione interna dei gas stessi. È noto infatti che dal percorso medio di una molecola si può risalire alle sue dimensioni, le quali concordano, almeno come ordine di grandezza, con quelle che si possono dedurre per vie affatto diverse.

È pur nota la semplice relazione che lega il coefficiente di viscosità η al percorso medio λ:

$$\lambda = k \frac{\eta}{\sqrt{p\varrho}}$$

dove p e ϱ sono rispettivamente la pressione e la densità del gas, mentre k sta a rappresentare un coefficiente puramente numerico molto prossimo a 1,8.

Però mentre son numerosissime le misure di attrito interno fra limiti di temperatura varianti fra 0 e 300°, scarseggiano quelle effettuate a temperature inferiori a 0°, e le ricerche mancano poi totalmente al disotto di — 20°. Mi è quindi sembrato opera di un qualche interesse, il completare lo studio del coefficiente di attrito interno dell'aria, a temperature molto basse; tanto più che l'impianto per la produzione dell'aria liquida nell'Istituto Fisico di Pisa, veniva opportunamente ad agevolare il lavoro.

Il metodo da me usato per la misura della viscosità dell'aria, e che consiste essenzialmente in quello dello smorzamento delle oscillazioni di un solido di rotazione, si trova esposto in una Nota precedente (2), assieme alla descrizione d'un apparecchio costruito appositamente per ovviare ad alcune cause di errore, che affettavano le determinazioni fatte da altri sperimentatori.

Esso consiste nella sua parte più importante in due cilindri coassiali tenuti fissi, fra i quali vien sostenuto, per mezzo di una sospensione bifilare,

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisica della R. Università di Pisa, diretto dal prof. A. Battelli.

(2) Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. XIV, 1° sem. 1905, p. 23.

provveduta del solito specchietto per le letture sopra una scala divisa, un cilindro cavo di pareti sottilissime.

Tanto la sospensione che il sistema dei cilindri sono rinchiusi in un apparecchio a tenuta, e il movimento all'equipaggio mobile viene trasmesso per mezzo di un ago magnetico, a cui è raccomandata la sospensione bifilare;

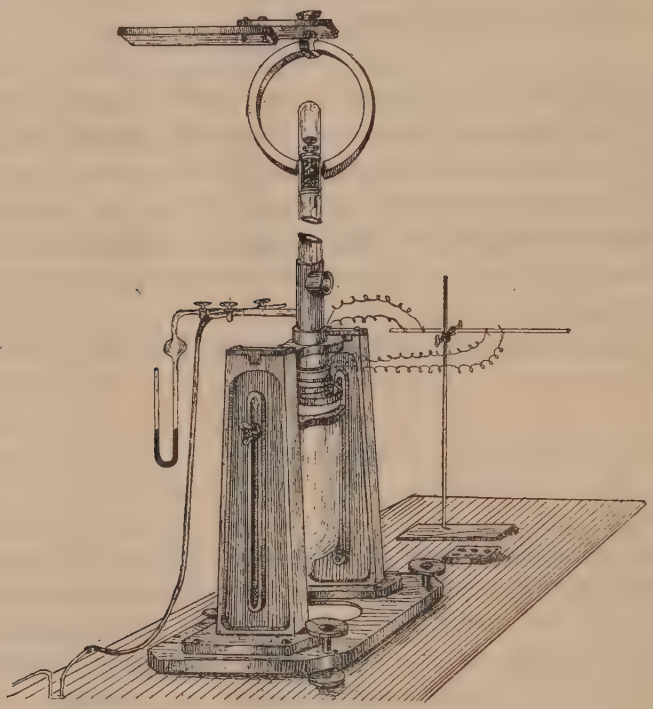


Fig. 1.

l'ago è mosso da un potente magnete permanente situato all'esterno e visibile in alto nella fig. 1ª.

La parte cilindrica dell'apparecchio ove avvenivano i fenomeni di attrito era immersa in una grossa provetta contenente un liquido che poteva esser tenuto agitato; e la provetta era a sua volta contenuta in un vaso cilindrico di vetro a doppia parete, in cui versavasi il refrigerante per portar il sistema dei cilindri alla temperatura voluta.

Per eliminare gli errori cui sopra ho accennato, i cilindri mobili adoperati nelle esperienze erano due, di ugual diametro e spessore, ma di altezze inversamente proporzionali alla densità dei due metalli diversi, di cui detti cilindri erano costituiti.

La misura delle due campanine mobili, una di ottone e l'altra di alluminio, le cui dimensioni figurano nella formula che dà il coefficienie di attrito

in funzione dello smorzamento delle oscillazioni, è stata fatta a mezzo di un comparatore di Froment dell'approssimazione di $^1/_{100}$ di mm. Questo comparatore fu verificato all'Ufficio Centrale di pesi e misure e la differenza per una lunghezza di cm. 20 è stata trovata di μ. 5.

Le dimensioni corrette sono, tenendo i simboli della Nota precitata, cioè chiamando con R_1 e R_2 rispettivamente il raggio esterno ed interno, e con h_1 e h_2 l'altezza esterna ed interna:

	Campana di ottone	Campana di alluminio
R_1	cm. 2,3317	cm. 2,328
R_2	» 2,2635	» 2,2595
h_1	» 2,993	» 10,079
h_2	» 2,914	» 9,948

Come si vede, i raggi delle due campanine, per quanto assai prossimi, non sono perfettamente uguali; d'altra parte, anche se si fosse potuta raggiungere questa identità per una determinata temperatura, essa sarebbe scomparsa per l'ineguale dilatazione dei metalli tosto che la temperatura fosse variata.

Val meglio quindi adoprare la formula

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_0 = \eta \left\{ \frac{k_1}{M_1} T_1 - \frac{k_0}{M_0} T_0 \right\}$$

dove ε_1 ed ε_0 sono decrementi ottenuti colle due diverse campane, M_1 e M_0 i loro momenti di inerzia, T_1 e T_0 i due periodi di oscillazione.

k_1 e k_2 sono due coefficienti numerici tali, però, che per una data coppia di campane $k_1 - k_0$ sia proporzionale prossimamente alla differenza delle loro altezze. M_1 e M_2, T_1 e T_0, come risulta dalla Nota antecedente, debbono risultar vicinissimi.

Per la misura di tali momenti d'inerzia, come per quella dei periodi, disponevo di un cronometro del tipo usato nella R. Marina, della fabbrica Dent, il quale portava il n. 3089.

L'equazione del tempo per questo cronometro era stata recentemente determinata nell'osservatorio astronomico di Arcetri.

Per quel che riguarda la misura delle temperature, mi son servito di due coppie termoelettriche identiche *rame-constantana*.

Ho saldato una delle coppie sulla parete esterna del cilindro fisso di diametro maggiore, e l'altra sull'interna del minore; mediante un commutatore a pozzette di mercurio, chiudevo l'una o l'altra delle due coppie sopra un galvanometro di grande resistenza (518 ohm), a cui avevo aggiunto 1500 ohm di resistenza interna.

Tale resistenza era sufficiente perchè potessi trascurare gli errori provenienti dalle variazioni di resistenza, necessariamente irregolari e malage-

voli per la misura, che avvenivano in quella parte del circuito del resto abbastanza esigua, la quale trovandosi nell'interno o nelle vicinanze dell'apparecchio di attrito, era esposta al raffreddamento dell'aria liquida.

Ho calibrato le coppie mediante un termometro campione di Baudin ad etere di petrolio. L'approssimazione di tale termometro è di $\frac{1}{2}$ grado per la temperatura di — 200° F C.

Difficoltà molto gravi si presentarono allorchè volli ottenere, nei vari casi, una temperatura uniforme nel gas che sottoponevo all'esperienza, in modo che tale si mantenesse durante il tempo in cui facevo le determinazioni di smorzamento delle ampiezze delle oscillazioni.

La bocca del recipiente a doppia parete, nel quale era contenuto il refrigerante (aria liquida), era causa di un forte irraggiamento, così che dovetti ricorrere a un bagno di temperatura.

Dopo molti e laboriosi tentativi osservai che il metodo migliore consisteva nel portare tutto il sistema dei cilindri, fissi e mobili, alla più bassa temperatura realizzabile, pazientando che questa acquistasse una distribuzione bene uniforme. Dipoi lasciavo riscaldare l'apparecchio avendo cura di agitar incessantemente il bagno. Bastava che l'agitatore ristasse dal funzionare pochi minuti, perchè la differenza segnata dalle due coppie termoelettriche salisse a 3 o 4 centigradi.

Ad ogni modo non raggiunsi pienamente l'intento, se non quando assegnai all'insieme dei cilindri fissi una capacità termica piuttosto considerevole; condizione questa che, se rendeva difficoltoso il raffreddamento, — al che potevasi rimediare impiegando maggior quantità di refrigerante — faceva sì che la variazione della temperatura fosse assai più regolare.

Per il bagno di temperatura che circonda la provetta, in cui si trova racchiusa la parte oscillante dell'apparecchio, dopo aver cimentato invano varie sostanze e miscugli, trovai conveniente usare l'etere di petrolio. È l'unico liquido che possa resistere alla temperatura dell'aria liquida senza gelare completamente; debbo tuttavia avvertire che, dovendo il bagno restare in presenza dell'aria, per poter essere agitato senza troppo complicare l'apparecchio, non tardava ad impregnarsi di sostanze estranee, di modo che s'intorbidava e a — 150 gradi prendeva l'aspetto di un liquido assai vischioso, ma che pur si poteva sempre agitare in modo da mantenere la temperatura abbastanza uniforme.

A compiere le misure di smorzamento aspettavo che le due coppie segnassero la stessa temperatura nei limiti di $\frac{1}{2}$ centigrado.

Per il calcolo del coefficiente di attrito facevo due determinazioni, una colla campana di alluminio e l'altra con quella di ottone, assai prossime per modo da esser certo che le condizioni della sospensione bifilare non fossero variate.

Scelte nelle due determinazioni due temperature molto prossime, ne facevo la media, e per l'una e l'altra campana riducevo il decremento logaritmico alla temperatura media per via di interpolazioni. Erano questi gli ε_1 e ε_0 che introducevo nella formula.

Le tabelle qui riportate dànno i valori ottenuti per il cofficiente di attrito in diverse serie di tali esperienze. Nella prima di esse sono stati riportati tutti gli elementi dei calcoli, e sono stati soppressi per ragione di brevità nelle altre.

$$\frac{k_1}{M_1} T_1 = 1117{,}70 \qquad \frac{k_0}{M_0} T_0 = 327{,}05$$

Temperatura	ε_1	ε_0	$\varepsilon_1 - \varepsilon_0$	η	Temperatura	Coefficiente di attrito interno
+ 21	0,083886	0,054153	0,029733	0,000193	21	0,000192
0	0,080575	0,051151	0,029424	191	— 37	156
— 21	0,077496	0,050383	0,027113	176	— 46	152
— 38	0,074159	0,050071	0,024188	157	— 55	137
— 48	0,072279	0,049994	0,022285	155	— 72	120
— 54	0,067512	0,046407	0,021105	137	— 82	106
— 70	0,064434	0,045640	0,018794	122	— 97	097
— 87	0,056160	0,040300	0,015867	103	— 115	059
— 118	0,049374	0,039822	0,009552	0,000062	— 145	024
— 130	0,047379	0,039676	0,007703	50	—	—
— 143	0,042652	0,038985	0,003697	24	—	—

Temperatura	Coefficiente di attrito interno	Temperatura	Coefficiente di attrito interno
19	0,000191	18	0,000190
0	188	— 5	187
— 11	184	— 30	186
— 22	173	— 43	155
— 45	152	— 59	137
— 60	133	— 74	117
— 73	177	— 86	102
— 89	098	— 102	061
— 98	087	— 123	051
— 106	079	— 140	028
— 132	042	—	—
— 144	021	—	—

Temperatura	Coefficiente di attrito interno	Temperatura	Coefficiente di attrito interno
+ 18	0,000191	17	0,000189
— 7	185	— 10	184
— 20	175	— 26	172
— 47	152	— 38	159
— 58	136	— 53	143
— 75	118	— 67	125
— 83	105	— 78	110
— 100	082	— 96	088
—	—	— 107	076
—	—	— 113	064

Non potendosi qui trattare di medie, non essendo i punti di temperatura uguali per tutte le serie, ho preferito determinare l'andamento dell'attrito interno coi soliti metodi grafici.

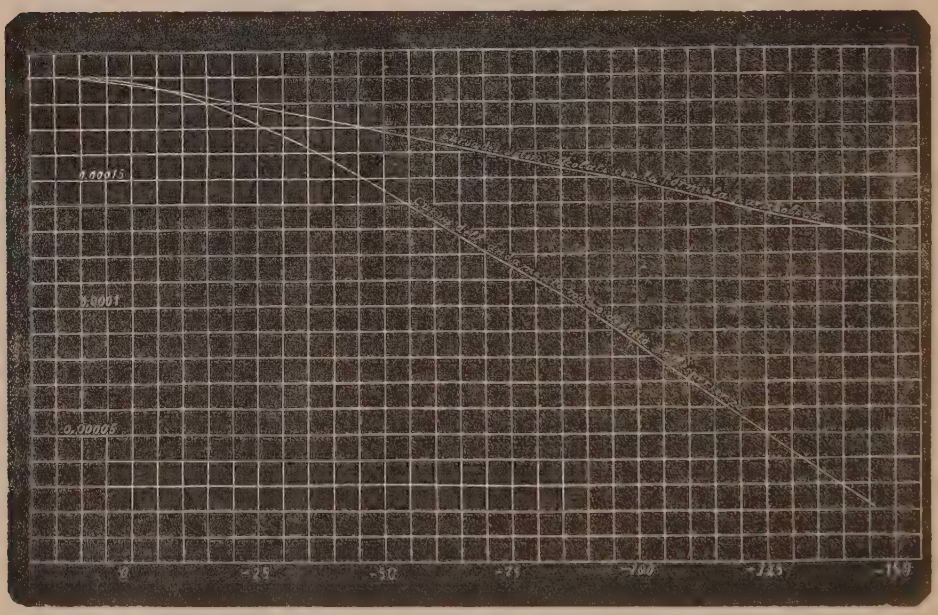


Fig. 2.

Ho ottenuto una curva riportata nella fig. 2ª, assieme alla grafica dei valori teorici calcolati colla formula parabolica.

Da questa tavola risulta a colpo d'occhio il rapido scostarsi del coefficiente di attrito interno dalla legge parabolica.

Ora, se riguardiamo le molecole come centri di una forza repulsiva, è naturale che al diminuire della temperatura, ossia della velocità molecolare, una molecola si possa meno avanzare nella sfera di azione di un'altra molecola. È quindi evidente, che nella teoria degli urti, il diametro fittizio di una molecola decresca quando la temperatura si eleva, giacchè l'urto in tale ipotesi comincia quando la traiettoria della molecola urtante devia dalla linea retta, ossia quando principia l'azione repulsiva della molecola urtata.

Sotto questo punto di vista le mie esperienze, d'accordo con quelle fatte a più elevate temperature, non sarebbero che una riconferma della teoria.

Se non che, per le temperature alle quali ho cimentato il gas, la divergenza dell'attrito interno dalla legge parabolica è notevolmente maggiore di quella osservata per temperature più elevate, e a spiegare la quale il Boltzmann avanzava l'ipotesi, che la forza repulsiva, posseduta dalla molecola, fosse proporzionale all'inversa della quinta potenza della distanza.

Per le temperature più basse la repulsione crescerebbe assai più rapidamente, e se vogliamo supporre l'azione molecolare proporzionale a $\frac{1}{r^n}$, r essendo la distanza di due centri di forza, n dovrebbe farsi molto maggiore di 5. Ma d'altra parte l'ipotesi del Boltzmann non è forse che un puro artifizio, per dedurre in forma matematica alcune proprietà dei gas, ipotesi che potrebbe anche non aver alcun reale riscontro nel meccanismo con cui i gas trasmettono il movimento.

Se si deve attribuire l'azione molecolare tutta quanta al movimento trasmesso per mezzo dell'etere agli *ioni*, come ne fanno vedere la possibilità i lavori puramente teorici del Lorentz, a spiegare il rapido decremento dell'attrito, basterebbe supporre che, al diminuire della temperatura, oltre che la forza viva molecolare, decresca notevolmente il rapporto fra il numero delle molecole e degli ioni liberi; ipotesi che invero sembra essere confermata dall'esperienza.

Per ora le esperienze sull'attrito interno, fatte tenendo soltanto conto della variazione della temperatura, non possono darci una risposta attendibile; ma forse essa ci può essere fornita dallo studio dell'influenza che eventualmente possono esercitare nella viscosità dei gas le varie specie di radiazioni: studio a cui ora mi sto accingendo.

Fisica terrestre. — *Risultati pireliometrici ottenuti dal 22 agosto a tutto giugno 1903 al R. Osservatorio Geofisico di Modena.* Nota di Ciro Chistoni, presentata dal Socio P. Blaserna.

Le misure pireliometriche nel periodo di tempo sopraindicato, vennero sempre eseguite col pireliometro di Angström N° 39, al quale stava unito l'amperimetro S. H. 66234 con derivazione 14894 (1). Come al solito l'ora è data in tempo medio dall' Europa centrale, ed

h = altezza media del sole, durante il tempo dell'osservazione.

θ = temperatura media indicata dal termometro unito al pireliometro.

B = pressione barometrica a 0°, diminuita di 700 mm.

t = temperatura dell'aria.

f = forza elastica del vapore acqueo contenuto nell'atmosfera.

u = umidità relativa dell'atmosfera.

i = intensità (in Amp.) della corrente elettrica compensatrice.

Q = intensità della radiazione espressa in gr. cal. per minuto primo e cm^2.

(1) I coefficienti relativi a questi apparecchi si trovano riferiti nella Nota *Sul pireliometro a compensazione elettrica dell'Angström* (Rend. della R. Accad. dei Lincei; vol. XIV, 1° sem. 1905, pag. 340 e pag. 451). Il pireliometro del R. Osservatorio Geofisico di Modena è a metri 64 sul livello del mare; e l'Osservatorio è alla latitudine boreale 44°, 38′, 53″ ed alla longitudine E da Gr. 0^h, 43^m, 42^s. Per ridurre la pressione atmosferica ad essere espressa in millimetri di mercurio a 0° ed alla densità normale, occorre diminuire i valori di B (aumentati di 700) di 0,031.

Modena 1902

Giorno	Ora	h	θ	i	Q	B	t	f	u	*Annotazioni*
22 agosto	8.19	29,5°	24,8	0,384	0,990	58,2	22,9	11,4	55	Aureola; Ci prossimi al ⊙
» »	9.19	39,5	26,8	0,399	1,070	58,5	23,4	11,7	55	Cu e Ci prossimi al ⊙
» »	15.19	39,5	32,3	0,402	1,088	57,6	26,2	9,4	37	Bianchiccio; aureola; Cu a Sud
» »	16.19	29,5	30,3	0,379	0,967	57,4	26,0	8,9	36	Bianchiccio
» »	17.19	18,9	29,9	0,344	0,796	57,2	25,9	8,7	35	Id.
23 »	8.19	29,3	22,3	0,364	0,888	59,5	22,2	11,9	60	Id.
» »	11.19	54,5	26,3	0,392	1,032	59,7	23,2	8,8	42	Aureola; Cu e Ci in vicinanza del ⊙
» »	12.19	56,9	31,1	0,390	1,024	59,1	24,3	7,8	35	Id.
» »	15.19	39,3	31,5	0,392	1,035	58,1	25,2	7,9	33	Bianchiccio; aureola
» »	16.19	29,3	30,3	0,372	0,931	57,8	25,4	7,4	32	Id.
» »	17.19	18,7	30,4	0,334	0,751	57,4	25,0	7,2	31	Id.
24 »	8.19	29,0	22,8	0,376	0,948	58,1	19,9	8,7	50	Biancastro
» »	9.19	39,0	25,4	0,402	1,085	58,0	21,8	9,1	47	Sereno
» »	10.19	47,8	28,3	0,411	1,136	58,0	22,2	10,3	52	Id.
» »	11.19	54,1	28,3	0,408	1,119	57,9	23,7	9,7	45	Id.
» »	12.19	56,5	28,7	0,415	1,158	57,7	24,0	9,5	43	Id.
» »	13.19	54,1	28,5	0,416	1,163	57,1	24,5	9,1	40	Lucido intorno al ⊙
» »	14.19	47,8	29,1	0,408	1,119	56,7	25,0	9,2	39	Sereno
» »	15.19	39,0	29,5	0,402	1,087	56,2	25,8	9,0	37	Id.
» »	16.19	29,0	29,2	0,372	0,931	55,8	26,0	9,1	37	Biancastro; aureola
25 »	9.18	38,7	25,5	0,389	1,016	55,5	23,6	11,9	55	Aureola; nebbia fitta all'orizzonte bianchiccio
» »	10.18	47,5	28,2	0,403	1,091	55,8	24,2	10,0	45	Id.
» »	11.18	53,8	28,4	0,404	1,097	55,6	25,0	10,3	44	Id.
» »	12.18	56,2	30,1	0,419	1,181	55,0	25,7	10,4	42	Lucido intorno al ⊙
» »	13.18	53,8	29,2	0,413	1,148	54,6	26,4	11,2	39	Sereno
» »	14.18	47,5	30,0	0,413	1,148	54,2	27,0	9,8	38	Id.
» »	16.18	28,8	28,5	0,358	1,036	54,3	27,2	8,3	32	Aureola; Ci e S in prossimità del ⊙
» »	17.18	18,2	29,3	0,305	0,626	54,1	27,1	7,9	30	Bianchiccio; aureola
26 »	8.18	28,5	22,7	0,374	0,938	55,2	21,8	12,4	64	Biancastro
» »	9.18	38,5	25,5	0,396	1,053	55,6	23,2	12,5	59	Sereno
» »	10.18	47,2	28,0	0,408	1,119	55,5	24,0	12,3	56	Id.
» »	11.18	53,5	29,1	0,409	1,126	55,3	25,5	11,5	48	Id.
» »	12.18	55,8	28,1	0,415	1,158	55,2	26,8	11,2	43	Id.
» »	13.18	53,5	30,5	0,418	1,176	54,9	27,5	9,9	37	Lucido intorno al ⊙
» »	14.18	47,2	31,6	0,389	1,019	54,6	28,5	11,1	38	Caliginoso
» »	15.18	38,5	32,5	0,365	0,898	54,0	28,6	12,5	43	Aureola; bianchiccio
» »	16.18	28,5	32,0	0,343	0,792	53,8	28,5	13,4	47	Aureola; Ci e S sparsi in prossimità del ⊙
2 settembre	8.16	26,8	24,8	0,396	1,053	57,4	22,6	12,9	63	Limpido intorno al ⊙
» »	9.16	36,6	27,3	0,423	1,202	57,7	23,1	12,2	58	Id.

Modena 1902

Giorno	Ora	h	θ	i	Q	B	t	f	u	*Annotazioni*
	hm	°								
2 settembre	10.16	45,1	29,3	0,443	1,320	57,9	23,4	11,7	55	Limpido intorno al ⊙
» »	11.16	51,1	29,0	0,432	1,255	57,8	24,6	11,0	48	Sereno
» »	12.16	53,4	27,9	0,435	1,273	57,6	25,1	10,8	46	Id. e leggera aureola
» »	14.16	45,1	31,7	0,433	1,263	57,4	26,0	9,1	37	Limpido intorno al ⊙
» »	15.16	36,6	29,9	0,414	1,153	56,9	26,6	10,4	40	Sereno
» »	16.16	26,8	30,4	0,385	0,998	56,6	26,6	10,8	42	Id.
3 »	9.16	36,3	27,5	0,392	1,033	58,5	24,2	14,8	66	Ci e S in vicinanza del ⊙; veli vaganti
» »	10.16	44,7	27,9	0,416	1,163	58,8	24,4	14,2	63	Biancastro
» »	12.16	53,0	30,6	0,424	1,210	58,5	27,4	13,1	49	Id. e Ci; ⊙ libero
» »	15.16	36,3	32,6	0,388	1,014	57,4	28,3	10,3	39	Biancastro
4 »	9.15	36,0	32,4	0,405	1,105	59,5	25,6	13,3	55	Id.
» »	12.15	52,6	29,9	0,428	1,233	59,2	27,8	11,5	43	Sereno
» »	15.15	36,0	32,1	0,405	1,105	58,2	29,3	10,7	35	Biancastro; aureola intorno al ⊙
5 »	9.15	35,7	29,4	0,394	1,044	58,1	26,0	13,4	53	Biancastro; aureola
» »	12.15	52,2	30,5	0,413	1,148	57,4	28,6	11,6	40	Id.
» »	15.15	35,7	30,6	0,375	0,947	55,9	30,1	11,2	35	Bianchiccio
6 »	15.15	35,4	30,5	0,403	1,093	54,0	26,0	12,4	50	Aureola; Cu in vicinanza del ⊙
7 »	9.14	35,1	24,9	0,409	1,123	58,1	22,0	9,9	50	Sereno
» »	15.14	35,1	31,0	0,418	1,177	57,6	25,8	6,4	26	Ci; S lontani dal ⊙; biancastro
8 »	15.14	34,8	28,1	0,396	1,054	58,3	26,6	8,5	33	Ci in vicinanza del ⊙; aureola
9 »	9.14	34,5	26,4	0,368	0,910	58,6	22,0	12,6	64	Bianchiccio; aureola
» »	15.14	34,5	29,0	0,369	0,916	56,4	26,8	10,3	39	Id.
10 »	9.13	34,2	25,7	0,365	0,895	56,7	23,0	13,2	63	Id.
» »	12.13	50,4	27,2	0,395	1,048	56,2	26,5	12,6	49	Bianchiccio ed intensa aureola
16 »	9.11	32,4	22,6	0,377	0,953	58,8	19,0	11,1	68	Biancastro; aureola
» »	15.11	32,4	27,6	0,379	0,966	57,2	23,2	9,4	45	Id. e Cu sparsi
17 »	9.11	32,1	26,5	0,387	1,007	57,6	20,6	9,3	51	Biancastro; lieve aureola
» »	12.11	47,7	29,3	0,416	1,164	56,8	23,7	7,6	35	Id. e Ci e Cu sparsi
18 »	9.11	31,8	25,4	0,367	0,904	57,1	21,8	10,3	53	Ci e Cu sparsi; ⊙ libero
» »	12.11	47,3	26,3	0,396	1,053	57,3	23,5	9,0	42	Aureola; Cu sparsi
20 »	9.10	31,2	20,3	0,397	1,056	64,8	17,0	8,2	57	Biancastro; aureola
» »	12.10	46,5	24,7	0,404	1,096	64,3	20,2	8,8	50	Id.
» »	15.10	31,2	27,7	0,388	1,012	63,0	21,8	7,1	37	Cu e Ci sparsi; aureola
21 »	9.9	30,8	23,1	0,389	1,015	62,0	17,0	9,0	62	Biancastro; aureola
» »	12.9	46,1	23,1	0,410	1,128	61,5	20,8	7,0	39	Id.
» »	15.9	30,8	27,0	0,389	1,017	60,0	22,2	6,6	33	Id.; qualche Ci verso l'orizzonte
22 »	9.9	30,5	21,9	0,390	1,020	61,3	16,6	8,7	62	Biancastro; aureola
» »	12.9	45,7	24,3	0,409	1,123	60,7	20,4	8,6	49	Sereno

Modena 1902

Giorno	Ora	h	θ	i	Q	B	t	f	u	*Annotazioni*
	h m									
22 settembre	15.9	30,5	27,5	0,389	1,017	59,8	22,2	7,5	37	Bianchiccio; Cu e Ci sparsi
27 »	15.7	28,9	24,1	0,387	1,005	59,9	21,0	5,8	31	Bianchiccio; aureola
30 »	9.6	28,3	20,5	0,391	1,024	51,8	15,2	8,3	64	Biancastro; aureola
3 ottobre	12.5	41,5	25,1	0,420	1,184	53,8	19,2	7,8	47	Aureola intorno al ⊙
» »	15.5	27,0	22,5	0,380	0,969	53,5	21,0	7,7	41	Cu sparsi; aureola
14 »	9.2	23,5	23,0	0,372	0,928	62,5	16,2	10,3	75	Biancastro; C verso Sud
15 »	9.2	23,2	18,2	0,386	0,997	57,8	16,8	9,9	70	Sereno
18 »	9.2	22,3	16,5	0,398	1,059	52,8	12,2	5,7	54	Id.
» »	12.2	35,8	18,0	0,422	1,192	54,0	14,4	3,7	31	Id.; aureola
» »	15.2	22,3	20,6	0,403	1,088	54,7	14,6	5,4	44	Sereno
20 »	9.1	21,7	13,5	0,379	0,960	60,6	11,0	7,8	80	Sereno; aureola
» »	12.1	35,1	16,8	0,421	1,186	60,2	19,8	10,3	60	Id.
» »	15.1	21,7	19,3	0,382	0,977	59,8	16,0	6,8	50	Qualche Cu; aureola
23 »	9.1	20,8	16,5	0,370	0,916	61,5	10,6	7,4	77	Biancastro
» »	15.1	20,8	18,5	0,359	0,863	60,9	14,2	4,5	37	Bianchiccio; Cu e Ci sparsi
13 novembre	15.1	15,2	13,8	0,275	0,505	61,9	11,8	6,2	60	Ci e S in prossimità del ⊙
14 »	12.1	27,0	14,1	0,383	0,980	63,4	10,2	5,6	62	Ci in vicinanza al ⊙; aureola
» »	15.1	15,0	14,2	0,324	0,702	62,5	11,0	5,1	52	Durante l'osservazione si forma un Cu prossimo a ⊙
15 »	12.1	26,9	15,7	0,387	1,001	64,6	9,3	4,8	57	Biancastro; aureola
» »	15.1	14,8	14,9	0,333	0,741	63,3	10,0	5,0	55	Id.
16 »	9.1	14,6	10,0	0,345	0,794	58,7	5,0	4,9	75	Biancastro
» »	12.1	26,7	14,1	0,394	1,037	57,6	9,2	4,8	57	Ci e S in vicinanza al ⊙
» »	15.1	14,6	21,4	0,345	0,798	56,4	10,2	4,9	53	Id.
22 »	9.2	13,4	0,3	0,347	0,800	61,5	−2,8	3,1	82	Sereno
» »	12.2	25,3	8,6	0,392	1,024	61,7	1,7	3,4	66	Id.
» »	15.2	13,4	15,6	0,333	0,742	61,7	3,8	3,5	58	Id.
10 dicembre	15.9	10,9	6,5	0,284	0,537	61,5	4,6	3,9	62	Veli intorno al ⊙
15 »	12.11	22,1	11,9	0,369	0,909	64,5	4,8	4,6	71	Bianchiccio; aureola
» »	15.11	10,6	11,3	0,264	0,465	63,3	5,8	4,4	64	Id.
16 »	12.12	22,0	7,0	0,315	0,661	64,1	4,5	5,0	80	Caliginoso
» »	15.12	10,6	10,8	0,255	0,434	64,1	5,4	4,4	66	Id.
17 »	12.12	22,0	9,1	0,307	0,628	64,9	4,7	4,6	71	Aureola intorno al ⊙; cielo bianchiccio
19 »	9.13	10,5	9,5	0,290	0,561	53,9	8,2	2,2	27	Bianchiccio
» »	12.13	21,9	15,0	0,395	1,043	54,0	11,6	2,5	26	Sereno
» »	15.13	10,5	15,0	0,308	0,634	52,3	12,0	2,2	21	⊙ libero; Ci sparsi
20 »	15.14	10,5	14,3	0,316	0,667	58,0	8,6	2,5	31	Sereno
21 »	12.14	21,9	15,0	0,349	0,814	53,8	8,8	3,9	45	Bianchiccio; aureola
»	15.14	10,5	17,1	0,300	0,602	52,7	10,6	3,4	36	Id.
22 dicembre	9.15	10,5	4,3	0,299	0,595	60,6	2,8	4,5	80	Bianchiccio

Modena 1902

Giorno	Ora	h	θ	i	Q	B	t	f	u	*Annotazioni*
	h m	o								
22 dicembre	12.15	21,9	12,6	0,351	0,823	62,5	6,8	4,8	66	Bianchiccio
» »	15.15	10,5	16,0	0,290	0,562	63,0	8,2	4,8	59	Id.
23 »	9.15	10,5	2,8	0,255	0,432	66,4	0,0	3,1	67	Id.
» »	12.15	21,9	11,9	0,352	0,827	67,8	4,1	3,6	61	Id.
» »	15.15	10,5	11,8	0,258	0,444	68,0	5,4	4,6	69	Id.
24 »	12.16	21,9	11,2	0,324	0,700	71,3	1,3	4,2	84	Bianchiccio aureola
» »	15.16	10,5	11,0	0,261	0,454	70,0	3,6	4,3	73	Bianchiccio
25 »	9.16	10,5	2,0	0,257	0,439	67,1	0,2	3,5	74	Sereno
» »	12.16	22,0	9,6	0,358	0,855	66,7	4,0	3,9	64	Id.
» »	15.16	10,5	16,0	0,271	0,491	64,7	5,4	3,8	58	Id.

Modena 1903

Giorno	Ora	h	θ	i	Q	B	t	f	u	*Annotazioni*
	h m	o								
2 gennaio	12.20	22,3	9,0	0,369	0,908	59,9	3,1	4,4	76	Aureola; caligine all'orizzonte
5 »	12.20	22,6	10,0	0,292	0,569	59,6	4,5	5,4	87	Id. e veli intorno al ⊙
16 »	12.26	24,2	6,0	0,346	0,797	68,4	−1,0	3,0	71	Aureola; caliginoso
18 »	12.27	24,6	4,5	0,355	0,839	72,7	−1,9	2,4	58	Id.
» »	15.27	12,8	8,0	0,282	0,530	71,7	−1,0	1,8	43	Id.
19 »	12.27	24,8	3,5	0,364	0,881	69,9	−0,5	2,0	45	Bianchiccio; aureola
» »	15.27	13,0	8,0	0,298	0,592	69,3	0,2	1,9	43	Id.
20 »	12.27	25,0	6,0	0,365	0,887	69,1	−1,6	1,8	44	Id.
» »	15.27	13,1	11,0	0,283	0,534	67,5	−0,2	2,5	56	Id.
22 »	12.28	25,4	6,0	0,357	0,848	64,0	−1,3	2,1	51	Caliginoso
» »	15.28	13,5	7,4	0,280	0,522	63,0	0,0	2,4	53	Id.
25 »	12.29	26,1	5,8	0,347	0,802	68,5	1,9	3,5	68	Id. ed aureola
» »	15.29	14,1	8,0	0,271	0,489	68,3	3,8	3,2	54	Id. Id.
26 »	12.29	26,3	9,8	0,361	0,869	70,4	4,9	3,0	47	Caliginoso
» »	15.29	14,3	12,0	0,313	0,654	69,6	5,4	2,9	43	S sparsi; bianchiccio
27 »	12.29	26,6	12,0	0,364	0,885	71,1	5,2	3,2	47	Ci e S in prossimità del ⊙
» »	15.29	14,5	12,9	0,301	0,605	69,6	7,0	3,3	44	Veli sparsi; bianchiccio
28 »	12.29	26,9	13,2	0,341	0,777	66,3	7,9	4,0	51	Caliginoso
» »	15.29	14,7	15,0	0,260	0,452	64,8	8,6	4,4	52	Id.
29 »	12.30	27,1	11,3	0,349	0,813	68,2	4,1	4,6	77	Id.
» »	15.30	15,0	12,6	0,251	0,421	68,0	6,2	5,0	70	Id.
30 gennaio	12.30	27,4	10,9	0,347	0,804	70,6	4,1	4,6	75	Id.
» »	15.30	15,2	14,8	0,285	0,543	69,1	6,0	5,1	73	Id.

Modena 1903

Giorno	Ora	h	θ	i	Q	B	t	f	u	*Annotazioni*
	h m									
3 febbraio	12.30	28,5	9,8	0,356	0,845	56,3	5,4	4,8	71	Caliginoso ed aureola
» »	15.30	16,1	14,0	0,285	0,543	56,3	8,0	5,0	62	Bianchiccio
4 »	12.30	28,8	11,0	0,361	0,870	66,9	5,1	3,6	55	Bianchiccio ed aureola
» »	15.30	16,4	15,0	0,310	0,642	66,2	7,0	3,7	49	Id.
5 »	12.30	29,1	11,2	0,353	0,831	68,5	5,2	4,3	65	Caliginoso
» »	15.30	16,7	13,3	0,292	0,570	67,8	7,2	4,2	55	Id.
6 »	12.31	29,4	11,0	0,363	0,879	66,4	7,4	4,6	60	Id.
» »	15.31	16,9	19,5	0,313	0,656	65,3	8,8	4,4	53	Bianchiccio
7 »	12.31	29,7	13,0	0,345	0,795	67,3	6,0	5,3	76	Id.
» »	15.31	17,2	16,0	0,293	0,574	67,0	9,0	5,4	63	Id.
8 »	12.31	30,0	12,3	0,355	0,841	71,9	7,1	5,8	78	Caliginoso
» »	15.31	17,4	16,0	0,295	0,582	70,6	10,2	6,5	70	Bianchiccio
18 »	11.0	30,9	11,0	0,386	0,994	71,1	2,8	2,8	52	Caliginoso
» »	11.15	31,3	11,5	0,386	0,995	71,1	3,0	2,8	50	Id.
» »	11.30	31,7	13,4	0,387	1,000	71,1	3,5	2,7	47	Id.
» »	11.40	32,0	14,0	0,389	1,011	71,0	4,0	2,7	45	Id.
» »	12.30	33,3	11,4	0,390	1,015	71,0	4,8	2,7	41	Id.
» »	15.19	21,0	14,8	0,356	0,847	69,9	6,6	2,5	35	Id.
» »	15.30	20,3	13,0	0,353	0,832	69,9	6,7	2,6	35	Veli intorno al ⊙
» »	15.37	19,5	13,0	0,353	0,832	69,9	6,6	2,5	35	Id.
19 »	12.30	33,7	11,8	0,376	0,944	74,8	6,5	3,6	51	Caliginoso
» »	15.30	20,5	15,2	0,324	0,702	73,6	8,4	3,4	42	Id.
20 »	15.30	20,8	20,6	0,858	0,859	69,0	12,6	3,6	34	Id.
21 »	12.30	34,4	17,4	0,388	1,007	70,0	12,8	4,9	45	Id.
» »	15.30	21,1	22,0	0,322	0,695	68,4	16,2	3,5	26	Bianchiccio
26 »	15.29	22,6	13,3	0,284	0,539	64,5	10,2	6,7	72	Caliginoso
4 marzo	12.28	38,9	15,1	0,398	1,059	52,5	13,0	5,0	45	Id.
» »	15.28	24,9	21,5	0,369	0,913	53,1	16,0	2,6	19	Bianchiccio
20 »	12.24	45,1	17,8	0,381	0,971	69,0	13,0	3,9	35	Caliginoso
21 »	12.24	45,5	18,4	0,389	1,013	69,9	14,5	4,4	37	Bianchiccio
» »	15.24	30,3	31,0	0,372	0,932	68,7	15,6	3,1	24	Id.
22 »	12.23	45,9	21,3	0,394	1,041	68,2	16,2	4,8	35	Caliginoso
» »	15.23	30,7	31,0	0,370	0,922	66,8	18,2	4,1	27	Id.
23 »	15.23	31,0	18,1	0,375	0,941	63,4	19,2	4,8	29	Id.
24 »	11.16	44,1	21,8	0,402	1,084	60,9	16,2	5,5	40	Bianchiccio
	11.34	45,1	23,2	0,406	1,106	60,7	16,5	5,3	38	Id.
	11.50	45,8	25,0	0,407	1,112	60,5	17,0	5,3	37	Id.
» »	12.0	46,4	26,0	0,408	1,118	60,3	17,1	5,3	37	Id.; ⊙ con aureola
» »	12.23	46,7	26,0	0,407	1,113	60,0	17,6	5,7	38	Id.

Modena 1903

Giorno	Ora	h	θ	i	Q	B	t	f	u	*Annotazioni*
	h m									
24 marzo	14.15	39,8	24,0	0,388	1,010	59,2	19,5	5,0	29	Bianchiccio; ⊙ con aureola
» »	14.35	37,9	27,0	0,375	0,945	59,2	19,8	4,5	27	Id.
» »	14.52	35,5	27,0	0,377	0,955	59,0	19,8	4,5	26	Id.
» »	15.23	31,3	27,0	0,365	0,895	58,9	20,0	4,3	25	Caliginoso; Ci ed S all'orizzonte Sud
25 »	15.22	31,6	23,3	0,342	0,785	59,8	17,4	4,7	32	Caliginoso
1 aprile	12.20	49,8	20,0	0,402	1,083	52,0	14,8	3,7	30	Bianchiccio
» »	15.20	33,8	22,0	0,380	0,968	52,5	16,0	1,9	14	Biancastro
12 »	11.35	52,3	19,5	0,406	1,104	47,2	16,6	5,0	38	Id.
» »	11.40	53,0	20,3	0,407	1,110	47,2	16,6	5,0	38	Id.
» »	12.17	54,0	21,2	0,413	1,143	46,3	18,2	4,7	30	Id.
» »	15.17	37,1	19,9	0,380	0,967	45,3	20,6	2,9	15	Id.
9 maggio	12.13	62,7	22,0	0,409	1,122	53,4	21,8	4,9	25	Sereno intorno al ⊙; Cu sparsi
22 »	11.34	63,9	24,3	0,385	0,995	62,6	23,7	8,0	37	Bianchiccio
» »	12.13	65,7	28,4	0,394	1,044	62,4	24,8	8,0	34	Id.
» »	15.13	45,7	25,5	0,381	0,975	61,7	25,2	7,1	30	Caliginoso
24 »	12.13	66,1	30,0	0,377	0,957	59,0	23,4	11,5	54	Caliginoso ed aureola intorno al ⊙
» »	15.13	46,0	27,9	0,375	0,945	57,9	25,0	10,8	46	Caliginoso
25 »	9.13	46,1	22,3	0,357	0,855	58,4	20,8	10,6	58	Leggera aureola; caliginoso
» »	12.13	66,3	27,5	0,375	0,945	57,1	23,5	9,9	46	Id.
» »	15.13	46,1	27,6	0,351	0,828	55,7	26,2	9,4	37	Id.; Ci ed S sparsi
26 »	12.13	66,5	29,4	0,398	1,066	54,9	23,0	8,3	40	Aureola attorno al ⊙; cielo bianchiccio
» »	15.13	46,3	28,5	0,379	0,966	53,1	24,2	9,1	41	Biancastro
30 »	9.14	46,7	23,5	0,394	1,042	51,7	22,2	9,8	49	Sereno
6 giugno	12.15	68,0	29,9	0,379	0,967	57,0	22,5	9,1	45	Caliginoso
» »	15.15	47,3	27,0	0,371	0,925	55,9	23,4	7,0	33	Sereno; nebbia all'orizzonte
17 »	12.17	68,7	26,4	0,362	0,881	54,1	22,2	6,2	32	Bianchiccio; Cu sparsi
18 »	9.17	47,8	22,0	0,357	0,855	54,3	21,8	8,9	45	Bianchiccio
24 »	15.18	47,8	26,4	0,374	0,940	54,3	25,8	7,6	31	Id.
25 »	12.18	68,7	28,5	0,386	1,002	56,2	25,1	10,8	47	Id. e Cu sparsi
» »	15.18	47,8	27,6	0,366	0,901	55,5	26,0	10,8	43	Id. Id.
26 »	12.19	68,7	28,4	0,392	1,033	58,1	27,2	9,7	37	Biancastro
» »	15.19	47,8	32,4	0,382	0,983	57,5	28,2	7,9	28	Id.
27 »	9.19	47,7	25,8	0,373	0,935	58,7	26,0	11,1	44	Caliginoso; aureola; C ed S all'orizzonte
» »	12.19	68,7	33,0	0,384	0,994	58,1	27,1	10,7	40	Caliginoso; aureola; Ci e S ad WSW
» »	15.19	47,7	33,4	0,370	0,923	57,4	28.4	9,9	34	Caliginoso; aureola; Ci e Cu sparsi
28 »	15.19	47,7	30,0	0,375	0,946	58,2	28,2	10,4	36	Bianchiccio; aureola
29 »	9.19	47,7	31,2	0,370	0,922	58,3	25,2	13,5	57	Bianchiccio
» »	12.19	68,6	28,5	0,392	1,033	57,5	28,0	12,4	44	Id.
» »	15.19	47,7	32,4	0,379	0,968	56,9	30,0	11,9	38	Id.

Fisica terrestre. — *Misure pireliometriche eseguite sul Monte Cimone nell'estate del 1902 e nell'estate del 1903.* Nota di Ciro Chistoni presentata dal Socio Blaserna.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Geologia. — *Delle sabbie fossilifere di Malagrotta sulla via Aurelia.* Nota dell'ing. Enrico Clerici, presentata dal Socio V. Cerruti.

I collettori di fossili dei dintorni di Roma, che conobbero la località di Malagrotta sulla via Aurelia, la compresero fra le adiacenze del Monte Mario ritenendo probabilmente che le sabbie fossilifere, che ivi appariscono, fossero una continuazione laterale delle sabbie gialle classiche.

Il prof. Meli, nel catalogo dei molluschi fossili del Monte Mario compilato insieme al Ponzi (1), indicando le singole località in cui furono trovate le varie specie, fece pure menzione di Malagrotta e notò che quelle sabbie « sembrano alquanto più recenti di quelle del Monte Mario ».

Anche io (2) le ritenni posteriori al giacimento classico e, di più, equivalenti alle argille salmastre del fosso della Rimessola e del Casale del Merlo: ed ora, dopo le osservazioni di dettaglio per la Rimessola, riportate in questi Rendiconti (3), stimo utile riferire altre notizie che contribuiscano a meglio precisare la posizione stratigrafica delle sabbie di Malagrotta, e ciò in continuazione delle ricerche fatte intorno alle sedimentazioni anteriori alla formazione del tufo granulare.

Nella figura qui unita è rappresentata una parte della sezione visibile in una cava di ghiaia, attualmente attiva, nel fianco settentrionale della collina posta a sinistra della via Aurelia, alla colonnetta del miglio VIII, poco oltre il casale di Malagrotta.

Il n. 1 è costituito da ghiaia frammista a sabbia di colore giallognolo variamente intenso, con elementi bene arrotondati, spesso discoidali, di calcari svariati, prevalentemente eocenici a piccole nummulitidee, con altri rosati e

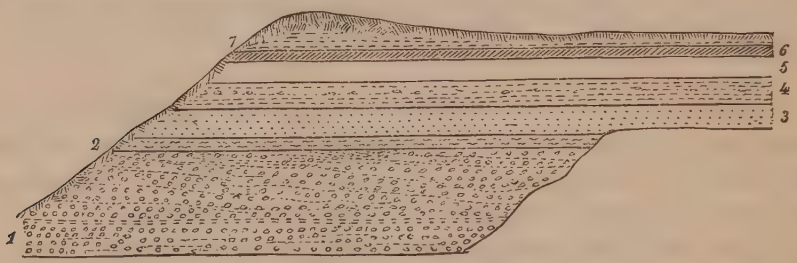
(1) *Molluschi fossili del Monte Mario presso Roma.* Atti R. Acc. dei Lincei, serie 4ª, Mem. della cl. di sc. fis. mat. e nat., vol. III (1886).

(2) *Sul Castor fiber, sull'Elephas meridionalis e sul periodo glaciale nei dintorni di Roma,* Boll. Soc. Geol. It., vol. X (1891), pag. 351; *La formazione salmastra nei dintorni di Roma,* Rendiconti R. Acc. Lincei, 2° sem. 1903, fasc. 3°.

(3) Vol. XIV, 1° sem. 1905. *Osservazioni sui sedimenti del Monte Mario anteriori alla formazione del tufo granulare.*

con piromache. Vi rinvenni frammenti di corna di *Cervus* cfr. *elaphus* Lin. e di ossami di *Bos*. La sabbia vi è in quantità assai variabile, talvolta assolutamente mancante in modo che la ghiaia sembra artificialmente lavata, tal'altra è invece tanto abbondante, a discapito della parte ghiaiosa, da costituire strati a sè.

Nella parte superiore la stratificazione apparisce meno regolare, ma più evidente, con straterelli fra loro inclinati o di colore oscuro, quasi nero, per arricchimento di minerali colorati. Vi prevalgono allora la magnetite, il ferro titanato, l'augite verde-bottiglia in piccoli cristalli isolati ed in cri-



stalliti irti di punte alle estremità. Fra gli altri minerali pesanti si notano, ma in quantità molto scarsa, apatite, granato roseo, staurolite, zircone, tormalina; fra i leggeri il quarzo è in prevalenza con pochi feldspati e frammenti di vetri bollosi. Anche quando la sabbia è di color chiaro e non mostra con evidenza i cristallini di augite, questi vi si possono sempre estrarre in discreta quantità mediante separazione meccanica. La potenza complessiva conosciuta del banco ghiaioso è di circa 7 m.

Segue uno strato n. 2, alto m. 0,50, di sabbia marnosa di color cenere-giallastro, ocraceo verso il termine superiore, ricca di granellini oscuri di piromaca e con molti fossili continentali, *Helix* (cfr. *H. nemoralis* Lin. var.), *Succinea*, *Pupa*, *Vertigo* cfr. *antivertigo* Drap., *Planorbis*, ma per solito resi assai fragili.

Il n. 3 è formato di sabbia, quasi sciolta, di color chiaro-giallognolo con fascie più marcate, contenente augite e qualche ghiaiuzza disseminata.

A questa fa seguito altra sabbia, n. 4, un po' argillosa, di color grigio-chiaro, in sommità piuttosto verdiccio, contenente noduli o concrezioni calcaree, nella quale, come in quella del n. 3, non si scorgono fossili macroscopici.

Lo strato n. 5 è costituito da sabbia fossilifera, alla parte inferiore quasi bianca, gialla invece con graduale passaggio, alla parte superiore. La sabbia biancastra è cosparsa di grani neri formati nella quasi totalità da piromaca, e contiene in abbondanza *Cardium Lamarcki* Reeve, *Myrtea lactea* Lin., *Tapes caudata* D'Anc., *Nassa reticulata* Lin.

La parte gialla è invece ricca di *Ostrea edulis* Lin. e di *Pecten sulcatus* Born, che taluno ritiene varietà del *P. glaber* Lin., a valve prevalentemente scompagnate, ma ben conservate, di grandi dimensioni (fino a 65 mm. di massimo diametro), spesso cosparse di *Balanus spongicola* Brown. Oltre le specie ora ricordate per la loro frequenza, molti altri fossili vi si possono raccogliere e nel complesso sono quelli propri delle formazioni salmastre, o più esattamente a salsedine variabile, con qualche specie affatto littorale (1).

Sullo strato di ostriche v'è circa 30 cm. di argilla compatta color avana seguìta da altri 40 cm. di argilla plastica verdiccia contenente qualche *Corbula gibba* Olivi, *Arca diluvii* Lamk., *Cardium paucicostatum* Sow., *Nassa reticulata* Lin., *Chenopus pespelecani* Lin., molte foraminifere (rotalie e polistomelle). Queste argille sono indicate insieme dal n. 6.

Il n. 7 è di sabbia un po' argillosa, di colore giallastro-sporco, ricoperta, in questo tratto di sezione, da terra vegetale; ma poco oltre, in altre escavazioni, sopporta una ghiaia a piccoli elementi e colorata in giallo intenso.

Le stesse roccie ora indicate si rivedono nelle vicine colline con qualche locale variazione di spessore facilmente spiegabile in una formazione prevalentemente di spiaggia. Vi si constata inoltre che la serie è ricoperta dal tufo granulare colle sue ormai ben note variazioni a pallottole pisolitiche e ad affinamenti argillosi chiari.

Le ghiaie del n. 1 (2), per la relativa abbondanza dell'augite e per la probabile assenza di quei ciottoli trachitici che scopersi in altre località e qui non trovai, o per la maggiore rarità loro, potrebbero costituire un tipo da interporsi, per esempio, fra le ghiaie di Decima rimarchevoli per i rari ciottoli trachitici, e quelle dette di Ponte Molle, le quali contengono in grande abbondanza svariate roccie vulcaniche e loro minerali isolati.

Si potrebbe tentare una ulteriore distinzione nelle nostre ghiaie più antiche: cioè ghiaie che contengono allo stato di ciottoli i frammenti di

(1) Oltre che per questa sabbia fossilifera, la località di Malagrotta è importante per le estese formazioni d'acqua dolce con farine fossili e marne tripolacee gremite di *Bythinia tentaculata* Lin., *Valvata piscinalis* Müll., *Planorbis, Limnaea, Neritina,* ecc., come per esempio alla collina della Casetta, al Quarto delle Colonne, alla Riserva dell'Isolotto. Al Quarto della Vipera le marne sono indurite in calcare argilloso e travertinoso gremito dei detti fossili.

(2) Analogamente le ghiaie della tenuta Torretta Massimi, presso il ponte della Pisana, contengono cristalli di augite, ma in piccolissima quantità. Sulle ghiaie si trovano sabbie, talvolta ghiaiose, racchiudenti straterelli caolinici e sostenenti argilla a *Cardium Lamarcki,* visibile lungo la strada alla salita presso il Casale della Pisana, prima di raggiungere la sommità che è ricoperta dai tufi.

Nella valletta a sud del detto ponte, in una cava di ghiaia forse abbandonata, fra gli straterelli sabbiosi oscuri ve ne ha uno di 10 cm. quasi per intero costituito da grani e cristalli di magnetite e di granato roseo con alquanta augite e scarso zircone, rutilo ecc.

masse trachitiche in denudazione, e ghiaie che, pur essendo la immediata continuazione delle prime, per le variate condizioni geologiche più non ne ricevettero. Per converso queste altre ghiaie si arricchirono di augite, che vi troviamo ottimamente conservata, e che, pervenuta per trasporto eolico di ceneri e lapilli, o per dilavamento di materiali augitici comunque originati, fa testimonianza di un'attività vulcanica posteriore, sia pur di poco, a quella che aveva prodotto le accennate lave trachitiche.

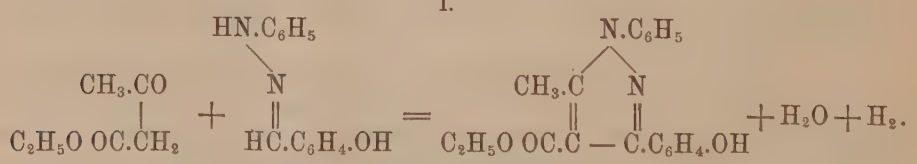
Chimica. — *Sull'acido 5-metil-1-fenil-3-ossifenilpirazol-4-carbonico ed il suo lattone* (1). Nota di G. Minunni e G. Lazzarini, presentata dal Socio E. Paternò.

L'idrazone dell'aldeide salicilica reagisce facilmente con l'etere acetoacetico in presenza di cloruro di zinco, fornendo un prodotto di condensazione $C_{17}H_{12}O_2N_2$ ben cristallizzato che per azione della potassa alcoolica si trasforma in un acido $C_{17}H_{14}O_3N_2$ e per riscaldamento o per azione dei cloruri acidi perde facilmente una molecola d'acqua rigenerando il composto primitivo. In base ai risultati delle esperienze da noi eseguite con altri idrazoni e descritte in una Nota precedente (2), il composto $C_{17}H_{14}O_3N_2$ deve considerarsi come un acido metilfenilossifenilpirazolcarbonico e la sostanza $C_{17}H_{12}O_2N_2$ come il relativo lattone formatosi dall'o-ossibenzalfenilidrazone ed etere acetoacetico secondo l'equazione:

$$C_{13}H_{12}ON_2 + C_6H_{10}O_3 = C_{17}H_{12}O_2N_2 + C_2H_5OH + H_2O + H_2.$$

Questa reazione procede evidentemente in due tempi. Dapprima si forma l'etere etilico dell'acido suddetto, il quale in una seconda fase perde una molecola di alcool, dando origine al lattone. Come fu fatto rilevare da uno di noi in una Nota precedente (3), la formazione del lattone dimostra che nell'acido metilfenilossifenilpirazolcarbonico il gruppo ossifenile ed il carbossile si trovano rispettivamente nelle posizioni 3 e 4. Possiamo quindi rappresentare le due fasi della reazione fra l'etere acetoacetico e l'idrazone dell'aldeide salicilica, mediante gli schemi seguenti:

I.

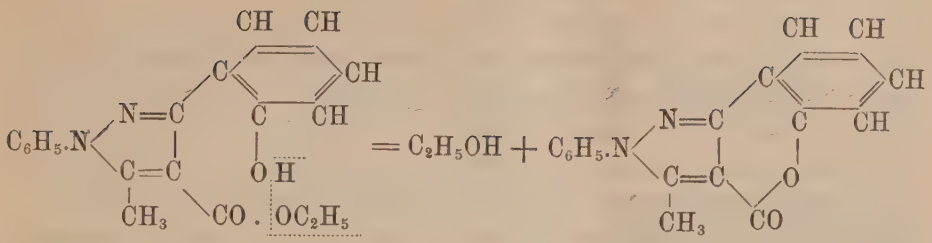


(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica farmaceutica e tossicologica della R. Università di Sassari.

(2) Vedi fasc. precedente.

(3) Questi Rendiconti, vol. XIV, 2° sem. 1905, pag. 414.

II.



Lattone dell'acido
5-metil-1-fenil-3-ossifenilpirazol-4-carbonico

Descrizione delle esperienze.

In un palloncino da 50 cm³ si riscalda un miscuglio di 10 gr. di o-ossibenzalfenilidrazone e 10 gr. di etere acetoacetico con dei pezzetti di cloruro di zinco a 130-135° per un'ora circa. Verso 120° la massa si liquefà completamente ed a 130° incomincia un forte sviluppo di gas che dopo circa mezz'ora cessa quasi completamente. Il prodotto della reazione che si presenta come una massa semisolida, amorfa, rossobruna, viene mescolato ancora caldo con egual volume di alcool, riscaldando a b. m. fino ad avere una soluzione completa, che, versata in un bicchiere e lasciata a sè, si rapprende dopo alcune ore quasi completamente in una poltiglia di piccoli cristalli. Si filtra alla pompa, si lava ripetutamente con alcool e si ricristallizza il prodotto quasi bianco dall'alcool. La sostanza dopo un paio di cristallizzazioni dall'alcool fondeva a 178-180°; dopo cinque cristallizzazioni dall'alcool si raggiunse il punto di fusione costante 182-183°.

L'analisi diede i seguenti risultati:

I. gr. 0,2321 di sostanza fornirono gr. 0,6308 di anidride carbonica e gr. 0,0916 di acqua;

II. gr. 0,2060 di sostanza diedero gr. 0,5604 di anidride carbonica e gr. 0,0863 di acqua;

III. gr. 0,2386 di sostanza fornirono cm³ 21,3 di azoto misurati a 12° ed a 742 mm. di pressione.

In 100 parti:

	Calcolato per	Trovato		
	$C_{17}H_{12}O_2N_2$	I	II	III
Carbonio	73,91	74,12	74,18	—
Idrogeno	4,35	4,38	4,65	—
Azoto	10,14	—	—	10,34

Il lattone dell'acido 5-metil-1-fenil-3-ossifenilpirazol-4-carbonico cristallizza dall'alcool in aghi bianchi finissimi. È quasi insolubile in acqua

a freddo, pochissimo solubile in acqua bollente ed in ligroina: è poco solubile in alcool freddo, si scioglie bene in alcool caldo, in etere ed in benzolo; è solubilissimo in cloroformio ed in acetone. Il rendimento in prodotto puro è di circa 50 % del teorico. Dalle acque alcooliche primitive del lattone si ebbe, per distillazione dapprima a bagno maria e poi in corrente di vapore, un residuo scuro, resinoso, friabile, solubile in alcool ed in benzolo. Da queste soluzioni però non si separava nulla di cristallino. Solo estraendo a caldo con ligroina bollente sopra 100°, si ebbero piccole quantità di prodotto cristallino, che dal punto di fusione e dalle altre proprietà fu riconosciuto identico al lattone.

Per ottenere l'*acido 5-metil-1-fenil-3-ossifenilpirazol-4-carbonico* libero si riscaldano a b. m. per circa mezz'ora a ricadere 10 gr. di lattone con 200 cm^3 di potassa alcoolica al 10 %. Il lattone si scioglie facilmente con colorazione rosso-violetta intensa che rapidamente passa al giallo. Dopo alcuni minuti di riscaldamento si separa già a caldo una sostanza bianca, cristallizzata in lunghi aghi sottili e completamente solubile in acqua. Questa sostanza, costituita dal sale potassico dell'acido, viene filtrata alla pompa, lavata sul filtro con un po' di alcool e sciolta in acqua. Dalla soluzione acquosa per aggiunta di acido cloridrico diluito, precipita in fiocchi cristallini bianchissimi l'acido libero che fu purificato per cristallizzazione dall'alcool, da cui si separa in aghi sottili e bianchi.

All'analisi si ebbero i risultati seguenti:

I. gr. 0,3131 di sostanza diedero gr. 0,7978 di anidride carbonica e gr. 0,1369 di acqua;

II. gr. 0,2272 di sostanza fornirono cm^3 19,6 di azoto misurati a 21° ed a 744 mm. di pressione.

In 100 parti:

	Calcolato per $C_{17}H_{14}O_3N_2$	Trovato I	Trovato II
Carbonio	69,38	69,49	—
Idrogeno	4,76	4,85	—
Azoto	9,52	—	9,60

L'acido metilfenilossifenilpirazolcarbonico fonde a circa 160° con sviluppo di gas; è insolubile in acqua ed in ligroina anche a caldo, si scioglie bene in alcool ed in benzolo caldo, è solubilissimo in cloroformio, in acetone ed in etere. A differenza di altri acidi metilfenilpirazolcarbonici, i quali riscaldati al di sopra del loro punto di fusione perdono anidride carbonica trasformandosi nei corrispondenti metildifenilpirazoli (1), l'acido metilfenilossifenilpirazolcarbonico perde per riscaldamento a circa 200° una molecola d'acqua, trasformandosi nel lattone fusibile a 182°. La stessa trasformazione ha luogo riscaldando l'acido a b. m. con cloruro di benzoile.

(1) Ber. *18*, 932, 2257.

Chimica. — *Eterificazione del γ-piridone con diazoidrocarburi grassi* (1). Nota di A. Peratoner ed E. Azzarello, presentata dal Socio E. Paternò.

È noto che molte ossipiridine non reagiscono sempre da composti ossidrilici, ma anche in una forma tautomera e cioè da chetodiidropiridine (piridoni):

	forme enoliche	forme chetoniche
α-derivato	CH — N = C-OH ‖ | CH — CH = CH	CH — NH — CO ‖ | CH — CH = CH
γ-derivato	CH — N = CH ‖ | CH — C(OH) — CH	CH — NH — CH ‖ ‖ CH — CO — CH

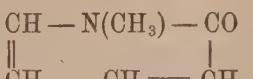
Così nella loro eterificazione, a seconda delle condizioni dell'esperienza, non si formano soltanto eteri con il radicale all'ossigeno (O-eteri), ma anche di quelli con il radicale alcoolico legato all'azoto (N-eteri); e precisamente H. v. Pechmann e Baltzer (2), per azione di ioduri alcoolici sul sale d'argento dell'α-ossipiridina, ottennero O-eteri:

CH — N = C-OCH_3 ‖ | CH — CH = CH	CH — N = C-OC_2H_5 ‖ | CH — CH = CH
α-metossipiridina	α-etossipiridina

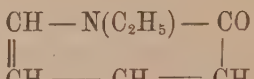
(1) Lavoro eseguito nel R. Istituto chimico di Palermo. — Le presenti esperienze erano destinate a venir pubblicate fra una serie di ricerche sopra derivati dell'ossipirone, con cui stanno strettamente connesse e di cui soltanto una parte è già comparsa per le stampe (A. Peratoner, *Ricerche sull'ossipirone ed alcuni suoi derivati.* Parte I. — *Derivati non azotati.* Giorn. di Scienze Nat. ed Econ. di Palermo, vol. XXV, pag. 239), mentre un'altra attende di essere completata. Però vedendo annunziato nella copertina del fascicolo di agosto dei « Monatshefte für Chemie (pubblicato il 23 settembre 1905), un lavoro del sig. H. Meyer, *Ueber die Einwirkung von Diazomethan auf Pyridone und Oxypyridincarbonsäure,* riteniamo opportuno di rendere note fin da ora quelle esperienze che potrebbero forse essere analoghe, se non identiche, ad alcune del sig. H. Meyer, quantunque la priorità di questo argomento ci sia già stata precedentemente assicurata. Infatti una Nota preliminare delle esperienze attuali, per quanto non completate, fu comunicata alla Società chimica di Roma nella seduta del 10 aprile, 1904 (E. Azzarello, *Eterificazione del γ-piridone con diazometano ed -etano*) ed un cenno sui risultati definitivi ottenuti venne fatto ancora dal dott. Palazzo in una nota posta nel suo lavoro *Azione dell'idrossilamina sull'etere dimetilpirondicarbonico,* presentato nei primi del luglio 1905 a questa R. Accademia dei Lincei e pubblicato nei relativi Rendiconti vol. XIV, 2° sem. 1905, fasc. 4°, pag. 244.

(2) Berichte *24*-3147,

ed invece N-eteri per azione di ioduri alcoolici sull'α-piridone libero



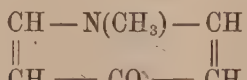
N-metil — α-piridone



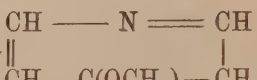
N-etil — α-piridone

La stessa α-metossipiridina potè essere in seguito ottenuta da v. Pechmann eterificando l'α-piridone con diazometano (1), ed è notevole il fatto che in questa reazione non si forma traccia di N-etere.

Anche della γ-ossipiridina sono nòti due eteri metilici isomeri



N-metil – γ-piridone



γ-metossipiridina

però mentre il primo era già stato ottenuto da Haitinger e Lieben (2) in modo analogo nel quale poi Pechmann preparò l' N-etere dell'α-piridone, al secondo si era potuto giungere solo per via indiretta e cioè per azione di metilato sodico sulla γ-cloropiridina (3).

La grande analogia di comportamento che il γ-piridone mostra con l'isomero α, faceva prevedere che il primo dovesse reagire con i diazoidrocarburi grassi anche analogamente al secondo: per azione di diazometano e diazoetano sul γ-piridone avrebbero dovuto formarsi esclusivamente O-eteri. Ed invero le prime esperienze che uno di noi (4) istituì in questo senso sembravano di confermare tale assunto; senonchè, essendosi impiegata una quantità troppo esigua di prodotto di partenza (γ-piridone), il risultato non potè essere del tutto decisivo. È questa la ragione per cui noi abbiamo ripreso lo studio della cennata reazione, impiegando rilevanti quantità di sostanza e mettendoci in condizioni da poter esaminare tutti i prodotti della reazione. I risultati finali non hanno confermata la prima previsione, giacchè da diazometano e γ-piridone formasi bensì γ-metossipiridina, ma insieme a questa si forma anche N-metil — γ-piridone ed anzi in quantità prevalente. Anche impiegando diazoetano non è evitata del tutto la formazione di N-etere, quantunque il prodotto principale sia in questo caso l' O-etere.

(1) Berichte *28*-1624.
(2) Monatshefte für Chemie, *6*-307.
(3) Monatshefte für Chemie, loc. cit.
(4) E. Azzarello, Rendiconti Soc. chimica di Roma, seduta 10 aprile 1904.

Azione del diazometano.

In una soluzione eterea di diazometano (da 3 cm^3 di nitroso metilcarbammato etilico) si sospende 1 gr. di piridone (1) secco polverizzato: tosto si ha un energico sviluppo di azoto che va diminuendo poco a poco e cessa nello spazio di circa un'ora. Si forma un denso olio bruno che, separato per svaporamento dall'eccesso di soluzione di diazoidrocarburo, si dimostra solubile in acqua ed alcool, ha reazione alcalina e contiene prodotto inalterato colorando ancora il cloruro ferrico. Disseccata la massa di reazione oleosa, proveniente da diverse preparazioni, su acido solforico e paraffina, venne dapprima, senz'altra depurazione, saggiata qualitativamente nell'apparecchio per la determinazione dell'ossimetile seguita da quella dell'N-metile col metodo di Herzig e Meyer (2). Constatandosi che il prodotto conteneva tanto dell'ossimetile quanto azometile, si passò al dosaggio quantitativo di questi gruppi adoperando unica quantità di sostanza per entrambe le determinazioni. I tre prodotti analizzati provenivano da preparazioni differenti.

I. gr. 0,3007 di sost. fornirono gr. 0,1207 di AgJ (metodo Zeisel).
II. » 0,6231 » » » » 0,2528 + 0,5180 di AgJ (met. Herzig e Meyer)
III. » 0,5203 » » » » 0,1380 + 0,3624 » » » » » »

	Trovato		
	I	II	III
$-OCH_3$ %	5,3	5,3	3,2
$=NCH_3$ %	—	9,9	8,5

Calcolando da questi dati la percentuale di prodotto eterificato, si viene alla conclusione che il γ-piridone si eterifica soltanto parzialmente e cioè nel rapporto di 46 % all'incirca. Questo risultato dal punto di vista quantitativo non è molto dissimile da quello ottenuto da Pechmann (3), il quale constatò che l'α-piridone neppure si eterifica completamente. Però mentre l'α-derivato reagisce col diazometano soltanto sotto la forma enolica dando esclusivamente l'etere ossimetilico, il γ-piridone in questa reazione si ha di

(1) Fu preparato svaporando ripetutamente (4-6 volte) a bagnomaria del pirone purissimo (dall'acido chelidonico) con eccesso di ammoniaca acquosa concentrata. Il prodotto che così ottenemmo era quasi puro e fu adoperato per le nostre ricerche solo dopo completa essiccazione nel vuoto su acido solforico.

(2) Berichte *27*-319; Monatshefte für Chemie, *15*-613 e *16*-599. Gli apparecchi necessarî, non riscontrandosi nei cataloghi ordinarî delle fabbriche di vetreria ad uso chimico, furono da noi fatti soffiare dai sigg. C. Kob & C. (Stützerbach) e dal sig. Anastasio Carosi (Roma).

(3) Berichte *28*-1625.

preferenza sotto la forma chetonica; infatti fornisce un miscuglio in cui trovasi il 16 % circa di O-etere (14 % del rendimento teorico) e il 35 % di N-etere (32 % del rendimento teorico).

Sulla separazione diretta dei due eteri isomeri formatisi, del resto conosciuti, non abbiamo insistito.

Azione del diazoetano.

A porzioni di soluzioni eteree di diazoetano (proveniente ciascuna da 5 cm^3 di nitroso-etilcarbammato etilico) si aggiungeva ogni volta 1 gr. di piridone secco polverizzato: la reazione procedeva con maggiore energia e molto più rapidamente di quella descritta per il diazometano, ottenendosi anche qui alla fine un olio contenente pure O-etere ed N-etere. Il vivace sviluppo di azoto osservato nella reazione, e che in generale si verifica quando i diazoidrocarburi grassi reagiscono con prodotti di natura acida spiccata, faceva supporre di già che il risultato dovesse differire da quello avutosi con il diazometano relativamente alla quatità di O-etere generatosi. Ed infatti, disseccato nel vuoto il prodotto di reazione e sottopostolo direttamente ad analisi, grezzo così come si trovava, si ottennero i seguenti risultati:

I. gr. 0,1671 di sost. fornirono, col metodo dell'ossietile di Zeisel, gr. 0,2126 di AgJ;

II. gr. 0,5106 di sost., sottoposti secondo Herzig e Meyer alla determinazione dell'ossietile seguita da quella dell'azoetile, fornirono gr. 0,6503 + 0,0813 di AgJ;

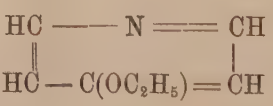
	Trovato	
	I	II
$-OC_2H_5$ %	24,3	24,4
$=NC_2H_5$ %	—	2,9

Calcolando da questi numeri le quantità di eteri contenuti nel prodotto greggio si ha:

appena 8 % di N-etere ed il 66 % di O-etere.

Da questo miscuglio inoltre fu agevole separare l'ossietilpiridina per semplice distillazione nel vuoto (a 15 mm. di pressione) essendo sostanza facilmente volatile. In tal modo si ricava quasi tutto il prodotto contenuto nel miscuglio primitivo.

La *γ-etossipiridina*



è un liquido incolore di odore piridico, bollente a 96° sotto la pressione di

15 mm., miscibile con alcool, non con acqua. Col metodo Zeisel fornì la quantità teorica di ossietile:

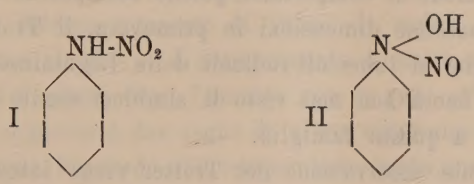
gr. 0,2100 di sost. diedero gr. 0,4010 di AgJ

	Trovato	Calcolato per C_7H_9NO
$-OC_2H_5$ %	36,54	36,58

Per azione dell'acqua di bromo sulla soluzione alcoolica dell'etere si ha un precipitato voluminoso che, trattato con anidride solforosa, diviene quasi incoloro. Cristallizzata questa sostanza dall'acqua calda, si ebbe in piccoli aghi incolori, i quali, assai probabilmente, rappresentano un bromidrato di un derivato bromosostituito. Infatti la soluzione acquosa di idrato sodico ne eliminò acido bromidrico, mettendo in libertà un olio bromurato volatile, incoloro, estraibile con etere, che malauguratamente non potè essere analizzato.

Dalla presente ricerca si rileva che l'eterificazione del γ-piridone con *diazometano* non avviene secondo una regola generale osservata da v. Pechmann per quelle sostanze che presentano il fenomeno della tautomeria: secondo questo autore (1) si ottengono di preferenza i metilderivati di quelle forme che posseggono il carattere acido più forte. Si hanno perciò in generale gli O-teri, mentre la formazione di C- od N-eteri avviene solo di raro.

Eccezione a tale regola costituiva sinora solamente il comportamento di alcune nitramine (2), per le quali possono prendersi in considerazione le formule



Talune di queste sostanze reagiscono sotto la formula I che è certamente la meno acida. Un'ulteriore eccezione viene presentata ora dal γ-piridone il quale reagisce pure sotto la forma meno acida — la chetonica — ed anche in questa assai stentatamente con un mezzo così potente di eterificazione come il diazometano.

Non è privo d'interesse tener presente a questo riguardo che il γ-piridone non è affatto eterificabile con cloruro d'acetile o anidride acetica, che certamente sono reattivi assai più blandi (3).

(1) Pechmann e Degner. Berichte *30*-646.

(2) Ibidem.

(3) Vedi Roscoe-Schorlemmer, Lehrbuch der org. Chemie v. Brühl, ecc., V Theil 1899, pag. 154.

Il *diazoetano* sia in queste osservazioni, sia in altre fatte in questo laboratorio, mostra una energia di reazione superiore a quella del diazometano. Questo diazocomposto infatti è capace di eterificare il γ-piridone con un rendimento di molto superiore (53 % del teorico) a quello fornito dal diazometano, e per giunta si nota che in tale reazione il piridone si discosta di poco dalla regola del Pechmann fornendo quasi esclusivamente O-etere.

Botanica. — *Sui tubercoli radicali della Datisca cannabina L.* (1). Nota del dott. Luigi Montemartini, presentata dal Socio R. Pirotta.

In una comunicazione fatta tre anni or sono alla Società Botanica Italiana (2) il dott. A. Trotter ha rilevato l'esistenza sulle radici di *Datisca cannabina*, a Padova, di speciali tubercoli che egli così descrive:

« Sono cilindrici, arrotondati all'estremità, lunghi 3-4 mm., 2 mm. circa « grossi. Tali tubercoli, che chiamerò semplici, non sono però i più comuni, « poichè d'ordinario, da uno stesso punto della radichetta se ne sviluppano « da 2 a 4, ed in questo caso o sono saldati per la loro base, divaricando « più o meno superiormente, o sono anche fusi in un'unica massa un po' « lobata alla sua estremità libera. Talora si possono anche presentare in agglo- « merazioni assai vistose, grandi quanto una noce e più, specialmente quando « si sviluppino dalle radichette laterali di vecchie e grosse radici ».

Per il loro modo di comportarsi, poichè scompaiono durante l'inverno e raggiungono le massime dimensioni in primavera, il Trotter ritiene queste formazioni analoghe ai tubercoli radicali delle Leguminose ed ammette trattarsi di un caso finora non mai visto di simbiosi simile osservata in piante non appartenenti a questa famiglia.

La interessante osservazione del Trotter viene integralmente riportata dal Lutz (3) nel suo recente lavoro sui microorganismi fissatori di azoto, senza aggiunta di altre osservazioni.

Lo studio morfologico, anatomico e biologico da me intrapreso su questi tubercoli, mi ha condotto invece a stabilire importanti differenze tra essi e quelli delle Leguminose.

Anzitutto i tubercoli della *Datisca* sono di origine nettamente radicale e si presentano quasi come le basi ipertrofiche di radici secondarie. Inoltre mentre nelle Leguminose l'ingrossamento è dovuto ad ipertrofia del tessuto midollare, nel quale si annidano i bacterî, con spostamento dei fasci libro-le-

(1) Lavoro eseguito nel R. Istituto Botanico di Roma.

(2) A. Trotter, *Intorno a tubercoli radicali di Datisca cannabina L.* (Bull. d. Soc. Bot. Italiana, 1902, pagg. 50-52).

(3) L. Lutz, *Les microorganismes fixateurs d'azote* (Paris, 1904).

gnosi verso la periferia, nella *Datisca* invece il cilindro centrale rimane pressochè intatto ed è il parenchima corticale che, per lo sviluppo dei microorganismi patogeni, diventa ipertrofico. Finalmente anche la struttura delle cellule nelle quali si annidano i bacterî è nella *Datisca* affatto diversa da quella delle cellule corrispondenti delle Leguminose, come avrò occasione di descrivere in maniera particolareggiata in un lavoro più completo.

Il microorganismo che vive nei tubercoli della *Datisca*, e che io ho esattamente studiato nel laboratorio di Anatomia Patologica di Pavia coll'aiuto del dott. R. Traina che qui vivamente ringrazio, si presenta esso pure diverso dal ben noto *Bacillus radicicola* delle Leguminose, sia all'esame diretto, sia alle colture nei mezzi ordinarî di nutrizione.

Riservandomi di caratterizzarlo completamente e denominarlo quando avrò ultimato alcune osservazioni di culture ed esperienze di inoculazione, ne descrivo qui i caratteri principali finora accertati:

Aspetto microscopico. Sono grossi e robusti bastoncini, lunghi 4-5 μ su 0,8-1 μ di spessore, rotondeggianti alle estremità, spesso disposti in catene di 2-3 membri e raramente di più (sempre però nettamente distinti l'uno dall'altro), talvolta anche disposti in posizioni angolari o parallele.

Colorabilità. Si colorano con tutti i colori comuni di anilina, meglio però col violetto di genziana secondo la formola di Ehrlich. Certi punti del loro corpo manifestano una affinità più pronunciata riguardo alle sostanze coloranti (endospore?).

Intensità di sviluppo rispetto ai substrati nutritizi ed alla temperatura. Crescono bene, ma molto lentamente, nei comuni terreni nutritivi; meglio però in un terreno composto di infuso di radici e altri organi di *Datisca* con gelatina al 10 %. L'accrescimento è molto stentato nei primi giorni, tanto che 4-5 giorni dopo l'innesto non si vede sviluppo alcuno: in seguito la coltura comincia a dar segno di vita e raggiunge lo sviluppo massimo in 15 a 20 giorni. Riguardo alla temperatura, basta quella dell'ambiente, però in termostato l'accrescimento è più rapido: l'optimum si ha tra 25° e 30° C.

Coltura in agar. Con *infissione*, lo sviluppo è molto lento e superficiale, cioè non solo nel punto di penetrazione dell'innesto, ma anche tutt'attorno nella superficie libera. Lungo il canale d'infissione si ha sviluppo assai scarso, sotto forma di sottili barbe o ciglia parallele, ora più ora meno lunghe, ma che vanno diminuendo dall'alto al basso.

Con *striscio*, lo sviluppo non rimane limitato al punto o alla linea di innesto, ma si estende su quasi tutta la superficie libera dell'agar restando quasi sempre libera la parte superiore (forse perchè più secca). Anche qui l'accrescimento è assai lento nei primi giorni, piuttosto rapido in seguito, e dopo 15 o 20 giorni si osserva sull'agar una patina poco elevata (più spessa però nella parte centrale, corrispondente alla striscia d'innesto), a margini

assai irregolari, sinuosi, frastagliati, come fatti da corti fili di bambagia, di aspetto sempre opaco, di colore bianco grigiastro senza riflessi, di consistenza mucilaginosa. L'acqua di condensazione è torbida, con abbondante precipitato fiocconoso.

Coltura in gelatina. L'*infissione* in gelatina con infuso di *Datisca* dà uno sviluppo abbastanza rigoglioso in superficie e lungo il canale d'innesto. Dopo 15-20 giorni si osserva fusione della gelatina superficiale a guisa di coppa, e la fusione procede in seguito gradatamente verso le parti più profonde, sì che la coppa si trasforma in imbuto; poi il fenomeno continua anche oltre il canale d'innesto, di guisa che dopo un paio di mesi si ha la liquefazione di tutta la gelatina contenuta nella provetta.

L'*infissione* in gelatina con brodo di carne dà invece uno sviluppo più lento e limitato al canale d'innesto, da cui si dipartono sottili filamenti laterali a guisa delle barbe di una penna d'oca. Questi filamenti sono assai sottili, tenui e bianchicci. Non si ha fusione della gelatina.

Coltura in brodo. Dà sedimento abbondante, fiocconoso, di colore giallastro scuro, mentre il brodo resta quasi limpido, con una sottile nubecola in sospensione.

Coltura su patata. Patina sottile, poco rilevata e poco evidente, di colore bianco grigiastro, con margine irregolare, finamente dentellato.

Piastra in agar. Ad occhio nudo, si osservano colonie superficiali puntiformi, rotondeggianti, poco lucide e poco rilevate, di colore bianchiccio quasi trasparenti, sì da confondersi colla superficie dell'agar. Si hanno anche colonie profonde, ma poco evidenti, rotondeggianti o, di raro, a cote.

Ad un ingrandimento di 50 diametri, si osservano colonie superficiali rotondeggianti, a margini irregolari ma netti e come formati da tanti segmenti di cerchio, di colore giallo carico tendente all'arancio. La zona marginale è formata da blocchi più grossi e più intensamente colorati, ma a contorno liscio, uniforme, senza prolungamenti. Le colonie profonde sono assai scarse, rotondeggianti, press' a poco cogli stessi caratteri di quelle superficiali, più chiare.

V. C.